

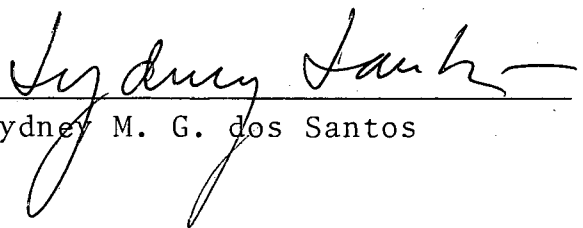
KIPPE EM HASTES RETAS EM

REGIME ELASTO-PLÁSTICO

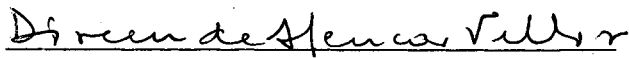
Eliane Derani da Costa

TESE SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DA COORDENAÇÃO DOS PROGRAMAS DE
PÓS-GRADUAÇÃO DE ENGENHARIA DA UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE
JANEIRO COMO PARTE DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO
DO GRAU DE MESTRE EM CIÊNCIAS (M. Sc.)

Aprovada por:



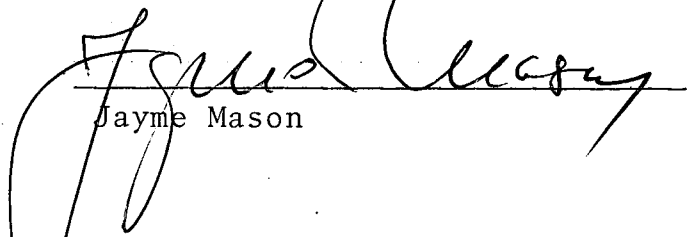
Sydney M. G. dos Santos



Dirceu Alencar Velloso



Paulo Alcântara Gomes



Jayme Mason

RIO DE JANEIRO, RJ. - BRASIL

FEVEREIRO DE 1983

DA COSTA, ELIANE DERANI

Kippe em Hastes Retas em Regime Elasto - Plástico Rio de Janeiro 1983.

XV , 160 p. 29,7 cm (COPPE-UFRJ, M.Sc., Engenharia Civil, 1983

Tese - Universidade Federal do Rio de Janeiro. Faculdade de Engenharia

1. Flambagem Transversal em Hastes Retas de Aço em Regime Elasto - Plástico I. COPPE-UFRJ II. Título (série).

Ofereço,

Ao pequenino sobrinho Bruno .

Aos meus pais

AGRADECIMENTOS

Ao Prof. Sidney M. G. dos Santos, pela confiança depositada, pelo grandioso incentivo e encorajamento à realização deste trabalho e, igualmente ressaltar o convívio amigo e dedicado ao longo deste estudo, quero apresentar-lhe os meus sinceros agradecimentos pela firme orientação.

Meus agradecimentos à PROMON, nas pessoas de meus superiores e amigos, Engº José de Moura Villas Boas e Engº Ulysses Cordeiro, pelo incentivo e ajuda que me foram conferidos.

Ao querido amigo, Humberto de Oliveira\ Maia Neto pela força e incentivo quase que habitual no término deste trabalho.

RESUMO

Procurou-se nesta tese estudar casos simples de hastes retas levadas à flambagem transversal (Kippe) em regime elasto-plástico. A exposição fundamenta-se numa formulação geral da Estabilidade Elástica devida à G. H. Bryan.

É instituída a equação geral de Kippe com aplicações a exemplos mediante o uso de diferenças finitas, tanto em fase elástica como em elasto-plástica.

Os resultados são discutidos em capítulo próprio. O tratamento numérico restringiu-se, face às dificuldades intrínsecas ao problema, ao exame de lâminas de aço de seção retangular.

ABSTRACT

The object of the present thesis is an investigation of the problem of elasto-plastic lateral buckling of beams. The theory is based on the general formulation of elastic stability due to G. H. Bryan.

The buckling equations are solved by the method of finite differences, both in the elastic and the elasto-plastic range.

Relevant results are discussed in a special chapter. In order to avoid, more involved questions, numerical treatments have been restricted to steel beams with rectangular cross-section.

SIMBOLOGIA

x, y, z - coordenadas do triedro fundamental

ξ, η, ζ - coordenadas do triedro solidário à seção

dx, dy, dz - comprimentos elementares nas direções x, y, z

$d\xi, d\eta, d\zeta$ - comprimentos elementares nas direções ξ, η, ζ

σ - tensão normal

Bryan usou como medida de compressão (deformação),
(= tensão/E)

σ_{\max} - tensão máxima atuante na seção

σ_e - tensão de escoamento do material

$B_1 = J_1 E$ - rigidez a flexão vertical

$B_2 = J_2 E$ - rigidez a flexão horizontal

E - módulo de elasticidade

J_1 - momento de inércia em relação ao eixo principal horizontal

J_2 - momento de inércia em relação ao eixo principal vertical

$$B' = \frac{B_1 B_2}{B_1 - B_2}$$

$R_T = G J_T$ - Rigidez a torção

J_T - momento de inércia de torção

ν - coeficiente de Poisson

$$G = u = n = \frac{E}{2(1 + \nu)} - \text{módulo de elasticidade transversal}$$

$$m = \frac{G}{(1 - 2\nu)} = \frac{E}{2(1 + \nu)(1 - 2\nu)} - \text{constante elástica de Thomson \& Tait}$$

$$\lambda = \frac{2G\nu}{(1 - 2\nu)} = \frac{E\nu}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)} - \text{constante elástica de Lamé}$$

u, v, w - deslocamento de um ponto x, y, z

ψ - rotação a torsão

ψ - desvio angular lateral

ε_0 - posição inicial da carga concentrada (Viga em balanço)

ε - deformação axial

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_x &= e \\ \varepsilon_y &= f \\ \varepsilon_z &= g \end{aligned} \right\} - \text{deformações unitárias nas direções } x, y, z$$

$$\left. \begin{aligned} \gamma_{xy} &= a \\ \gamma_{xz} &= b \\ \gamma_{yz} &= c \end{aligned} \right\} \text{ distorsões unitárias nos planos } xy, xz, yz$$

- ϕ - energia potencial de deformação
 V - energia potencial das forças de massa
 TdS - energia potencial das tensões superficiais
 dS - elemento de área
 W, V - energia potencial total de um sólido
 ρ - massa específica
 δ - 1.^a variação
 δ^2 - 2.^a variação
 P, Q, R, S, T, U - componentes de tensões na nova posição de equilíbrio
 X, Y, Z - forças de massa
 F, G, H - tensões superficiais
 F_1, F_2, F - forças laterais
 f, f_0, f_1, f_{cr} - flechas
 e - excentricidade
 P - carga concentrada de componentes P_x, P_y, P_z
 P - carga por unidade de largura da placa infinita
 P - carga concentrada na haste ou coluna
 p - pressão por unidade de área de extremidade de faixa unitária da placa

- p - carga distribuída uniforme na haste
- P_{cr} - carga crítica de flambagem
- P_{cr}^{el}, p_{cr}^{el} - carga crítica de flambagem transversal, fase elástica
- P_{cr}, p_{cr}, p_k - carga crítica de flambagem transversal, na fase elasto-plástica
- P_e, p_e - carga concentrada e carga distribuída na haste, que promove o início do escoamento na seção mais crítica
- P_{et}, p_{et} - carga concentrada e carga distribuída na haste, que promove o escoamento total da seção mais crítica
- h - diferença de nível entre extremidades das hastes (no tri-articulado)
- h - semi-espessura da placa infinita
- h - espaçamento das divisões da haste para aplicação do método de diferenças finitas
- l - comprimento de haste
- H - altura da seção transversal da haste
- H_i - altura reduzida devido à plastificação da seção i
- b - largura da seção
- α - posição angular inicial das hastes tri-articuladas

- θ - variação angular da haste do tri-articulado
- k - raio de giração da seção transversal da faixa unitária da placa infinita
- K, K_L - constante de mola
- K_1 - constante =
$$\frac{M_p}{A \sqrt{B' R_T}}$$
- K_2 - constante =
$$\frac{M_p}{B \sqrt{B' R_T}}$$
- K - constante =
$$\frac{P}{\sqrt{B' R_T}} \quad \text{ou} \quad \frac{P}{2 \sqrt{B' R_T}}$$
- K_A, K_B, K_C - valores de K para seções com plastificação
- α - constante = K_B^2 / K_C^2
- β - constante = K_A^2 / K_C^2
- A - área da seção transversal
- A, B - distância da carga concentrada às extremidades A e B
- A, B, C, D, E - determinantes menores
- Δ_1, Δ_2 - determinantes auxiliares
- Δ_1 - deslocamento horizontal
- Δ_2 - deslocamento vertical

Δ_L	-	deslocamento vertical no topo do dispositivo aparafusado
S	-	rigidez
s	-	comprimento do eixo médio da peça deformada
$S_1, S_2 \dots$	-	seções da haste na posição considerada
E	-	dispositivo aparafusado
D	-	célula de leitura de carga
W	-	contrapeso
G_A	-	centro gravidade Seção A
G_B	-	centro gravidade Seção B
Ω	-	conjugado de componentes $\Omega_x, \Omega_y, \Omega_z$
ω	-	momento de P em relação ao centro da gravidade da seção, de componentes $\omega_x, \omega_y, \omega_z$
M	-	momento fletor atuante plano vertical
D	-	momento fletor atuante plano horizontal
T	-	momento torsor
V	-	reação vertical
H	-	reação axial
L	-	reação plano horizontal
C	-	cortante

N - esforço axial

$D_A, M_A, T_A, V_A, H_A, L_A$ - reações de apoio na extremidade A

$D_B, M_B, T_B, V_B, H_B, L_B$ - reações de apoio na extremidade B

ΣM_0 - momento M resultante das cargas verticais e reação

ΣD_0 - momento D resultante das cargas horizontais e reação

$D_\eta, M_\zeta, T_\xi, C$ - esforços numa seção S

$\frac{1}{\rho}$ - curvatura

$d\delta, d\gamma$ - rotação da tangente ao eixo da haste nas extremidades do elemento adotados

M_A - momento fletor atuante

M_R - momento resistente

$M_P = \frac{PAB}{\ell}$ - momento na seção sob a carga concentrada na haste bi-apoiada com engaste à torsão

M - matriz

$|M|$ - determinante da matriz M

ÍNDICE

	Pág.
CAPÍTULO I - INTRODUÇÃO	1
1.1 - Formulação Teórica	1
1.2 - Configuração Simples	13
CAPÍTULO II - FORMULAÇÃO DAS EQUAÇÕES NA FASE ELÁSTICA .	50
2.1 - Apresentação Geral para Hastes Retas	50
2.2 - Equação Geral do Kippe	62
CAPÍTULO III - RESOLUÇÃO NUMÉRICA DA EQUAÇÃO	63
3.1 - Aplicações	64
3.1-1 - Viga em Balanço	64
3.1-1.1 - Carga Concentrada na Extremidade	66
3.1-1.2 - Carga Uniforme Distribuída	79
3.1-2 - Viga Bi-Apoiada com Engaste à Torção	89
3.1-2.1 - Carga Concentrada no Meio do Vão	91
CAPÍTULO IV - KIPPE EM HASTES NO REGIME ELASTO-PLÁSTICO	103
4.1 - Aplicações	103
4.1-1 - Viga em Balanço	106

4.1-1.1 - Carga Concentrada na Extremidade	109
4.1-2 - Viga Bi-Apoiada com Engaste à Torção	124
4.1-2.1 - Carga Concentrada no Meio do Vão	126
CAPÍTULO V - ANÁLISE DOS RESULTADOS	143
CAPÍTULO VI - CONCLUSÕES	149
APÊNDICE A	151
APÊNDICE B	153
APÊNDICE C	156
BIBLIOGRAFIA	159

CAPÍTULO I

INTRODUÇÃO

1.1 - FORMULAÇÃO TEÓRICA

O problema de instabilidade elástica sendo extensivo a praticamente todo sólido sujeito a esforços sollicitantes, começamos esta introdução apresentando sua formulação geral. Na bibliografia atual encontramos dois roteiros principais: a de R. V. Southwell, publicado em 30/01/1913 nos Anais da Royal Society, sob o título de "On the General Theory of Elastic Stability"; e a de G. H. Bryan, surgido em fevereiro de 1888, titulado como: "On the Stability of Elastic Systems", nos Proceedings da Cambridge Philosophical Society.

Optamos por apresentar sinteticamente o deste segundo autor, por ser mais compacto e mais objetivo, o que passamos a fazer.

O PROBLEMA GERAL DA ESTABILIDADE ELÁSTICA

Kirchhoff foi o primeiro a mostrar que dadas as forças de massa agindo sobre sólidos elásticos, e também as tensões superficiais e ou deslocamentos de superfície, existe um e somente um estado de deformação no qual o corpo pode estar em equilíbrio e que esse equilíbrio é essencialmente estável para todos os deslocamentos, com exceção do deslocamento de corpo rígido.

Euler mostrou que uma haste em balanço de comprimento l e rigidez a flexão EI , torna-se instável se a carga de compressão em sua extremidade é maior que a obtida pela fórmula:

$$\frac{P}{EI} = \frac{\pi^2}{l^2}$$

Greenhill elaborou a fórmula correspondente, quando a haste recebe em ambas extremidades forças e ou momentos e é suposta ainda estar sob a influência de força centrífuga. Ele também determinou a maior altura de uma barra vertical delgada, compatível, com estabilidade, sendo seu diâmetro uma função conhecida da altura.

Até então esses foram os únicos exemplos em que a questão de estabilidade foi abordada juntamente com a teoria da Elasticidade.

Para Bryan, pareceu porém mais valioso, dar uma investigação geral das circunstâncias em que um sistema elástico pode estar em equilíbrio instável; é o que mostramos a seguir: seja um sólido em equilíbrio, sujeito a um estado de tensões e deformações devidas à influência de forças externas e restrições de apoio.

Designemos \underline{u} , \underline{v} , \underline{w} os deslocamentos de um ponto genérico (x, y, z) e de \underline{e} , \underline{f} , \underline{g} , \underline{a} , \underline{b} , \underline{c} as deformações nes

te mesmo ponto (*). Sendo o potencial elástico ou energia potencial de deformação por unidade de volume, uma função quadrática, temos para um corpo isotrópicos Hookiano:

$$\begin{aligned} \phi (e, f, g, a, b, c) \equiv & \frac{1}{2} (m + m) (e + f + g)^2 + \\ & + \frac{1}{2} n (a^2 + b^2 + c^2 - 4 fg - 4ge - 4ef) \dots \end{aligned} \quad (I.1)$$

OBS.: As constantes elásticas são as usadas por Thomson e Tait. Ver Anexo B.

Denominemos \underline{V} o potencial das forças de massa do ponto $(x + u, y + v, z + w)$ por unidade de massa e de \underline{TdS} a energia potencial das tensões superficiais (forças de contacto) sobre a superfície do elemento dS .

A energia potencial total de todo o sistema na posição de equilíbrio será a soma das integrais ao longo do volume e área externa do sólido, como segue:

$$W = \iiint \phi \, dx \, dy \, dz + \iiint \rho V \, dx \, dy \, dz + \iint T \, dS \quad (I.2)$$

Segundo a formulação energética, o equilíbrio estável se efetua para uma posição na qual W seja mínimo; e ter-se-á equilíbrio instável quando W fornece um valor máximo (ou

(*) Mantivemos a Notação da Memória original desse autor.

mini-máximo, segundo Bryan).

Para tal, denominando δu , δv , δw , pequenas variações dos deslocamentos do ponto, a primeira variação da energia potencial será nula, indicando assim posições de W máximos ou mínimos:

$$\delta W = \iiint \delta \phi \, dx \, dy \, dz + \iiint \rho \delta V \, dx \, dy \, dz + \iint \delta T \, dS = 0 \quad (I.3)$$

A segunda variação, negativa, indica situações de minimáximos ou seja, equilíbrio instável:

$$\delta^2 W = \iiint \delta^2 \phi \, dx \, dy \, dz + \iiint \rho \delta^2 V \, dx \, dy \, dz + \iint \delta^2 T \, dS < 0 \quad (I.4)$$

Em caso contrário o equilíbrio será estável (ou indiferente).

Chamando de \underline{P} , \underline{Q} , \underline{R} , \underline{S} , \underline{T} , \underline{U} as componentes de tensões na nova posição de equilíbrio; \underline{X} , \underline{Y} , \underline{Z} , forças de massa, e \underline{F} , \underline{G} , \underline{H} forças de superfícies.

$$\delta \phi = P \delta e + Q \delta f + R \delta g + S \delta a + T \delta b + U \delta c \dots \quad (I.5)$$

e desde que $\phi(e, f, g, a, b, c)$ é uma função homogênea e quadrática de e, f, g, a, b, c : (Ver Apêndice A)

$$\delta^2 \phi = \delta P \delta e + \delta Q \delta f + \delta R \delta g + \delta S \delta a + \delta T \delta b + \delta U \delta c = 2 \phi(\delta e, \delta f, \delta g, \delta a, \delta b, \delta c) \dots \quad (I.6)$$

essencialmente positiva.

A energia potencial V das forças de massa sen do função da posição $(x+u, y+v, z+w)$, temos:

$$\delta V = \delta u \frac{\partial V}{\partial x} + \delta v \frac{\partial V}{\partial y} + \delta w \frac{\partial V}{\partial z} = -X \delta u - Y \delta v - Z \delta w \dots \quad (I.7)$$

temos também:

$$\begin{aligned} \delta^2 V = & \delta u^2 \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \delta v^2 \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \delta w^2 \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} + 2 \delta v \delta w \frac{\partial^2 V}{\partial y \partial z} + \\ & + 2 \delta w \delta u \frac{\partial^2 V}{\partial z \partial x} + 2 \delta u \delta v \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y} = -\delta X \delta u - \delta Y \delta v - \delta Z \delta w \dots \end{aligned} \quad (I.8)$$

e finalmente,

$$\delta T = -F \delta u - G \delta v - H \delta w \quad (I.9)$$

$$\delta^2 T = -\delta F \delta u - \delta G \delta v - \delta H \delta w \quad (I.10)$$

Observando que como $\delta^2 \phi$ é essencialmente positi va, a equação (I.4) será negativa se a soma das 2.^a e 3.^a parce las for negativa e maior do que a primeira, em valor absoluto. Para isto é necessário que nas expressões de $\delta^2 V$ e $\delta^2 T$ os deslocamentos sejam tais que as variações das deformações (δe , δf , δg , δa , δb , δc) sejam infinitamente pequenas comparadas com as variações dos deslocamentos (δu , δv , δw).

Admitamos que as duas citadas variações sejam pequenas quantidades da mesma ordem de grandeza. Assim para que $\iiint \rho \delta^2 V \, dx \, dy \, dz$ possa ser comparável em grandeza com $\iiint \delta^2 \phi \, dx \, dy \, dz$, $\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}$, $\frac{\partial^2 V}{\partial z^2}$, $\frac{\partial^2 V}{\partial y \partial z}$, $\frac{\partial^2 V}{\partial z \partial x}$, $\frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y}$ devem ser comparáveis, em grandeza com as constantes elásticas m , n ; o mesmo devendo ocorrer com as forças $-\frac{\partial V}{\partial x}$, $-\frac{\partial V}{\partial y}$, $-\frac{\partial V}{\partial z}$, que aparecem, feita a integração.

Porém da equação de equilíbrio (I.3), tem-se que forças desta grandeza produzirão deformações finitas no corpo, ao invés de infinitamente pequenas.

No estabelecido acima, isto só é possível, porém, para corpos super-extensíveis. Como gelatina ou borracha, casos que não são aqui considerados ⁽¹⁾.

Como conclusão temos que o equilíbrio de um sólido elástico sujeito a um sistema de forças de massa e forças de

(¹) Em resumo Bryan chama a atenção para o fato de que só com tensões da mesma ordem de grandeza das constantes elásticas seria possível que as integrais negativas não excedessem a positiva.

Assim, se tivermos $\epsilon = \sigma/E$ com valores de σ da ordem de E , $\sigma = E$ por exemplo, teremos deformações finitas, e não infinitesimais.

superfície que produzem pequenas deformações nos corpos é essencialmente estável para todos os deslocamentos produzidos, com exceção daqueles em que as variações produzidas nas deformações venham a ser extremamente pequenas em comparação com as variações das posições das partículas do sólido, ou seja: se δu , δv , δw forem infinitésimos de primeira ordem, δe , δf ,, o sejam de segunda ordem.

Essa é a conclusão fundamental da apresentação de Bryan, e que tem amplo sentido prático, a saber: pesquisar situações de instabilidade equivale a buscar posições em que as variações das deformações sejam de ordem superior às das variações dos deslocamentos. Na base de todos os métodos depois de Bryan, descobertos ou formulados, acha-se sempre explícita ou implicitamente essa formulação como veremos nos casos que iremos tratar.

Estabilidade de Hastes, Placas e Cascas Delgadas

No princípio desse artigo Bryan fez alusão à determinação de Greenhill e Euler quanto ao critério de instabilidade de uma haste delgada. De maneira semelhante deve-se encontrar a condição em que uma chapa delgada e longa, sujeita a determinadas forças de extremidade em seu plano, se apresenta instável.

Como exemplo, consideremos uma chapa retangular,

de comprimento infinito, largura ℓ e espessura $2h$, submetida a forças P uniformemente distribuídas, atuando nos bordos e contidas no plano médio da chapa (Fig. I.1). Retiremos uma faixa de largura unitária, conforme Figura I.2.

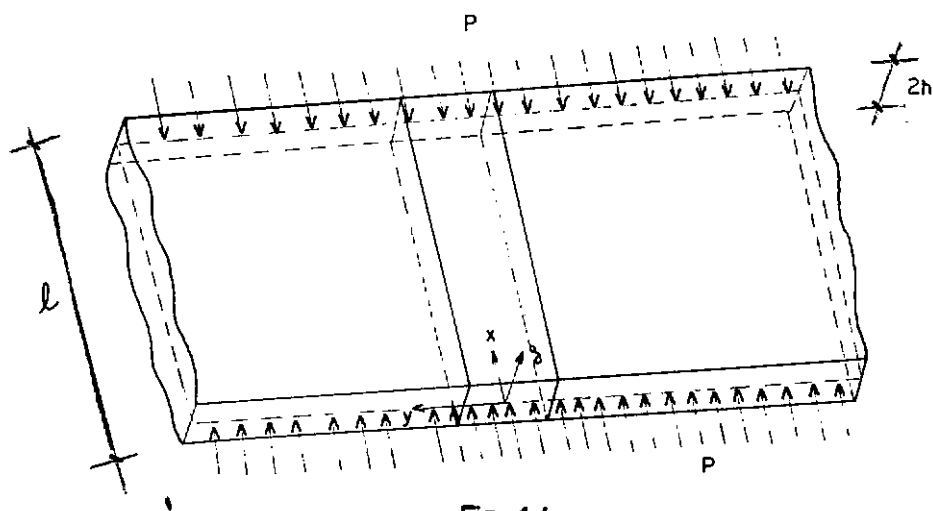


Fig. 1.1

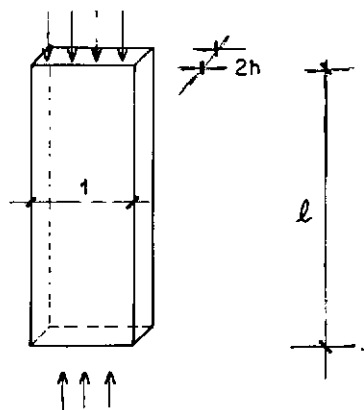


Fig. 1.2

Neste caso, que bem próximo lembra o problema de Euler, de haste carregada numa extremidade, a condição de instabilidade é:

$$P > \frac{8}{3} nh^3 \frac{m}{m+n} \frac{\pi^2}{\ell^2} \quad (\text{I.11})$$

ou

$$P > \frac{1}{(1 - \nu^2)} EI \frac{\pi^2}{\ell^2} \quad (\text{I.12})$$

(Ver constantes elásticas - APENDICE B).

Supõe-se que os bordos da chapa sejam rotulados ou engastados.

Isto dá uma idéia grosseira da maior força que pode ser aplicada ao longo das extremidades de uma fôlha, sem flambagem.

Para provar o resultado acima tomemos o triedro da Fig. (I.1) anterior. Suponhamos que a placa se deforme de tal maneira que em algum ponto atinja um pequeno deslocamento w perpendicular ao seu plano, independente da posição y . Sendo s o comprimento medido ao longo da nova superfície média no plano xz , o trabalho da carga P (por unidade de comprimento de extremidade), em deformar a superfície é:

$$P \int_0^{\ell} \left(\frac{ds}{dx} - 1 \right) dx = \frac{1}{2} P \int_0^{\ell} \left(\frac{dw}{dx} \right)^2 dx \quad (I.13)$$

A energia potencial de flexão por unidade de comprimento é:

$$\frac{4}{3} nh^3 \left(\frac{m}{m+n} \right) \int_0^{\ell} \left(\frac{d^2 w}{dx^2} \right)^2 dx \quad (I.14)$$

(Ver APÊNDICE C).

A placa permanecerá estável quando:

$$\frac{1}{2} P \int_0^{\ell} \left(\frac{dw}{dx} \right)^2 dx < \frac{4}{3} nh^3 \left(\frac{m}{m+n} \right) \int_0^{\ell} \left(\frac{d^2 w}{dx^2} \right)^2 dx \quad (I.15)$$

para qualquer possível deformação.

Se os dois bordos ($x = 0$ e $x = \ell$) são fixados, $w = 0$ e, portanto, w pode ser explicitado através da Série de Fourier, como a seguir:

$$w = \sum_{r=1}^{r=\infty} a_r \sin \frac{r \pi x}{\ell} \dots \dots \quad (I.16)$$

Se, além disso, as direções dos planos tangentes ao longo dos bordos são fixados, $\frac{dw}{dx} = 0$, w pode ser desenvolvido

sob a forma:

$$w = \sum_{r=0}^{r=\infty} a_r \cos \frac{r \pi x}{\ell} \dots\dots \quad (\text{I.17})$$

Em ambos os casos a condição para estabilidade (I.14) requer que:

$$\frac{1}{2} P \sum_{r=1}^{\infty} a_r^2 \frac{r^2 \pi^2}{\ell^2} < \frac{4}{3} nh^3 \left(\frac{m}{m+n} \right) \sum_{r=1}^{r=\infty} a_r^2 \frac{r^4 \pi^4}{\ell^4} \dots\dots \quad (\text{I.18})$$

ou

$$P < \frac{8}{3} nh^3 \left(\frac{m}{m+n} \right) \frac{\pi^2}{\ell^2} \frac{\sum_{r=1}^{\infty} r^4 a_r^2}{\sum_{r=1}^{\infty} r^2 a_r^2} \quad (\text{I.19})$$

Para todos os valores de a_r .

Porém $\sum r^4 a_r^2 / \sum r^2 a_r^2$ terá um valor mínimo igual a 1 quando todas as constantes $a_2, a_3 \dots$ desaparecem e a_1 não é zero. Portanto a forma do plano será estável ou instável conforme P seja menor ou maior que $\frac{8}{3} nh^3 \left(\frac{m}{m+n} \right) \frac{\pi^2}{\ell^2}$.

Se o equilíbrio na forma do plano é crítico, o valor de P é igual ao valor acima e a pressão por unidade de área das extremidades será:

$$p = \frac{P}{2h} = \frac{4}{3} nh^2 \left(\frac{m}{m+n} \right) \frac{\pi^2}{\ell^2} \dots\dots \quad (\text{I.20})$$

Se σ é a medida de compressão da superfície:

$$8 \, nh \left(\frac{m}{m+n} \right) \sigma = P \quad \therefore \quad \sigma = \frac{\pi^2}{3} \frac{h^2}{l^2} \dots\dots \quad (\text{I.21})$$

- No Problema da Haste de Euler

$$p = n \, k^2 \left(\frac{3m - n}{m} \right) \frac{\pi^2}{l^2} \quad (\text{I.22})$$

$$\sigma = \pi^2 \frac{k^2}{l^2} \quad (\text{I.23})$$

onde k é o raio de giração da seção transversal da haste, em torno do eixo em que a flexão ocorre.

Os valores de σ serão iguais nos dois casos se

$$k^2 = \frac{h^2}{3} \quad (\text{I.24})$$

Tomando-se h e k suficientemente pequenos com parados com l os valores de σ podem ser tão pequenos quanto desejarmos, entretanto a lâmina bem como a haste, se delgadas o bastante, serão instáveis para forças bem menores das que exigidas para produzir equilíbrio.

1.2- Configuração Simples

Feita a apresentação geral do problema de Estabilidade, vejamos alguns casos de interesse objetivo em que os resultados daquela formulação se tornam particularmente importantes.

Quanto à configuração de uma peça diversos são os comportamentos, e por conseguinte diversas as formas assumidas no estado de equilíbrio.

Basicamente, resumindo, temos os casos seguintes principais:

1. Problemas com bifurcação da posição de equilíbrio;
2. Problemas sem bifurcação da posição de equilíbrio;
- 2.1 - Problema de tensões
3. Problema de Inversão de equilíbrio com descontinuidade.

Antes, porém, cabe ressaltar que os problemas de instabilidade somente são referidos às peças comprimidas. Como já formulado anteriormente, o equilíbrio de um sistema elástico é estável, instável ou indiferente, conforme a energia total do sistema, aumente, diminua ou permaneça invariável, quando a

estrutura passa de uma configuração de equilíbrio para uma configuração qualquer infinitamente próxima, tal como foi mostrado por Bryan.

Como exemplo, tomemos, uma haste engastada na base e analisemos o seu equilíbrio, considerando-a primeiramente descarregada. Se impusermos um desvio lateral através de um esforço, na sua direção menos resistente, conforme Fig. (1.3-a) e admitindo-se que as tensões na peça não atinjam o limite de ruptura, estar-se-á realizando trabalho que é absorvido em forma de energia elástica. Esta energia faz com que o sistema retorne à posição inicial quando cessado o esforço lateral.

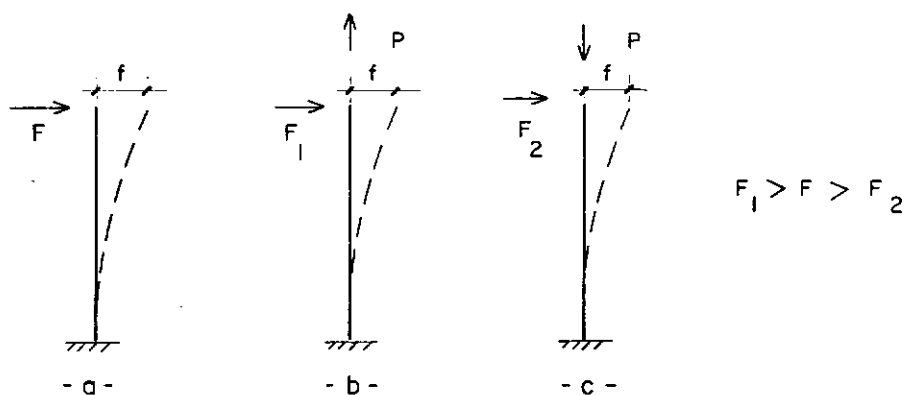


Fig. 1.3

Supondo-se a peça tracionada, para afastá-la de mesma posição, a energia que se forneceu ao sistema é maior do que a anterior uma vez que a força de tração realiza trabalho negativo, impedindo o deslocamento lateral da peça

(Fig. I.3-b). Retirado o esforço, a energia acumulada, faz a força voltar mais rapidamente do que no caso anterior. O equilíbrio de uma peça tracionada é sempre estável, e muito mais estável do que sem carga.

Para a mesma peça comprimida a energia absorvida através do trabalho realizado pela força lateral é bem menor que a dos casos anteriores pois a compressão favorece ao desvio. Soltando a haste (Fig. I.3-a), esta retornará ou não a sua posição inicial conforme a energia acumulada seja ou não suficiente para tal. Dá-se então um equilíbrio estável, instável ou indiferente.

A flambagem é assim a ocorrência de instabilidade de do estado de equilíbrio de peças estruturais submetidas a tensões de compressão. Quando ela ocorre, os deslocamentos se rão sempre muito maiores que as deformações, conforme a teoria mostrou e gráficos em casos simples adiante estarão ilustrando.

RETORNANDO AOS CASOS:

CASO 1 - Problema de Estabilidade com Bifurcação de Posição de Equilíbrio

Em linhas gerais um corpo é submetido a uma carga P crescente de zero até atingir um valor de carga crítica (P_{cr}). O que caracteriza o problema é que para valores maiores de P_{cr} deixa de haver univocidade entre carga e deslocamento.

Um exemplo simples é a flambagem por flexão de peça reta submetida à compressão axial como vemos a seguir:

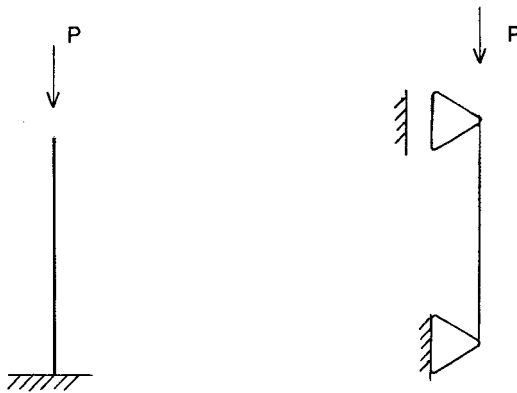


Fig. 1.4

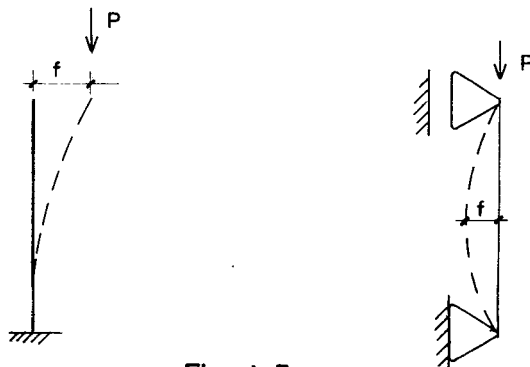


Fig. 1.5

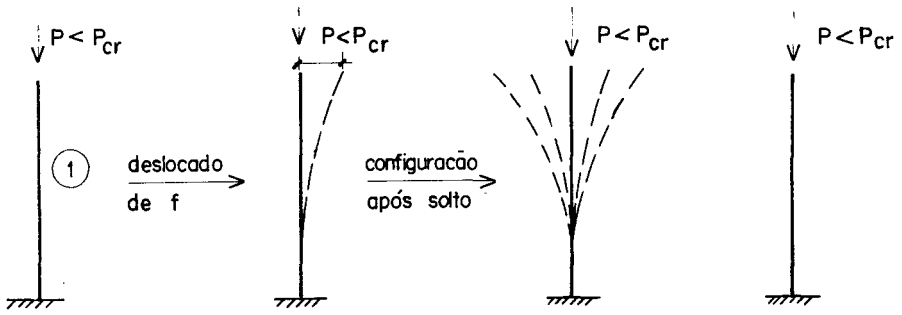
As flechas f das hastes da Figura I.4 são nulas enquanto P estiver abaixo da carga crítica. Neste caso se impusermos um afastamento lateral ou uma flexão de tal ordem que se atinja um valor moderado da flecha f , a haste ainda é capaz de retornar elasticamente à posição retilínea, através de oscilações amortecidas, quando cessada a causa que provocou o afastamento, para tal, é utilizada a energia absorvida pela haste na ocasião do afastamento imposto. Diz-se então que a peça está em equilíbrio estável.

Observe-se que quanto maior for a carga P menor a energia imposta à haste para deslocá-la (pois o trabalho realizado por P é positivo e favorece o desvio) e por conseguinte menor a energia acumulada para o retorno, sendo pois, as oscilações cada vez mais amortecidas.

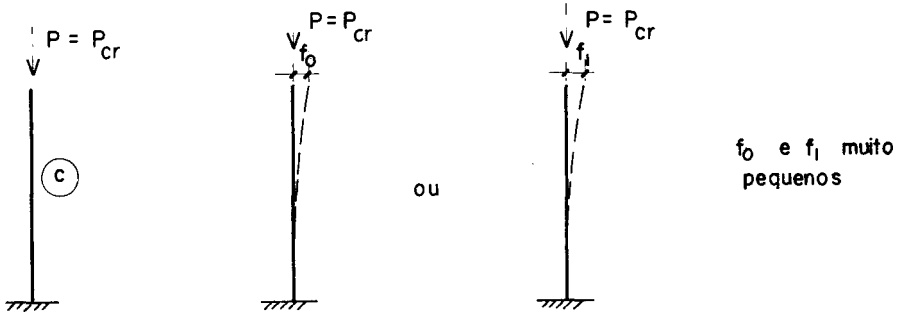
Para valores P maiores que a carga crítica ainda é possível uma forma de equilíbrio nesta posição retilínea. É o chamado Equilíbrio Instável. Se desviarmos a haste de alguma forma, esta não mais retorna a sua posição inicial, procurando então uma posição de equilíbrio estável na curva 3 Figura I.7.

Para carga $P = P_{cr}$ o equilíbrio é indiferente: é o ponto de bifurcação e a peça pode assumir posições infinitamente próximas da posição retilínea.

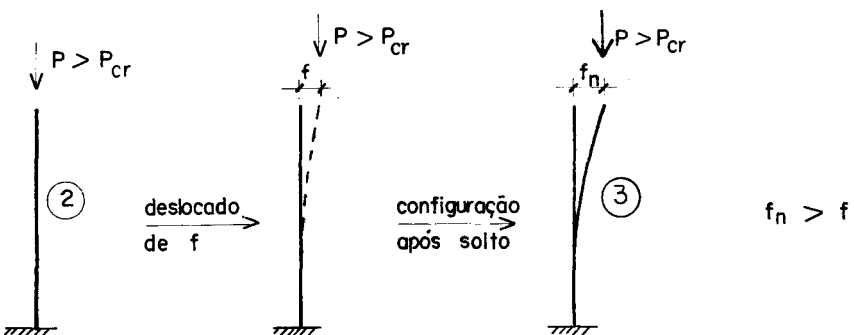
A seguir um resumo das fases de equilíbrio.



- a -



- b -



- c -

Fig. 1.6

Na Figura 1.7 temos o gráfico representativo das fases de equilíbrio do problema de estabilidade com bifurcação de equilíbrio. Vê-se geometricamente que os deslocamentos possíveis são necessariamente bem maiores que as deformações unitárias em peças Hookianas.

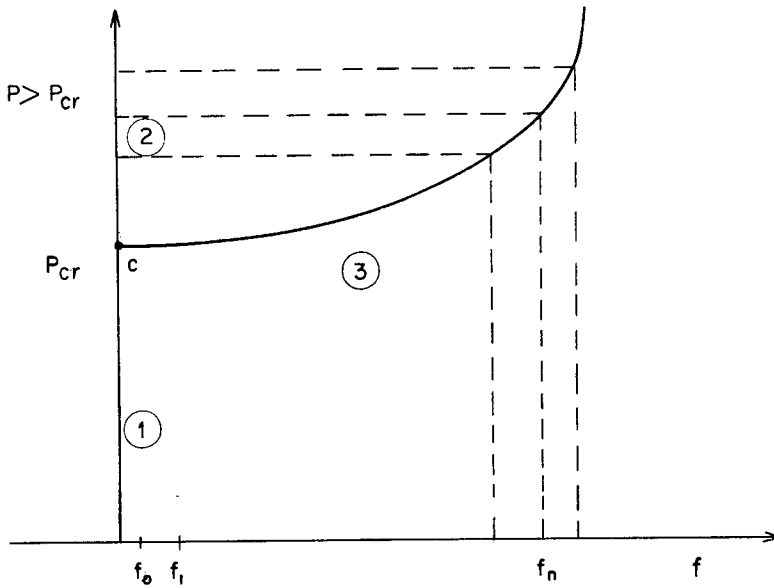


Fig. 1.7

- (1) equilíbrio Estável
- (2) equilíbrio Instável
- (3) equilíbrio Estável
- 4 equilíbrio Indiferente

Do gráfico podemos analisar que para valores maiores do que P_{crit} , existe a possibilidade de haver duas posições de equilíbrio, sendo uma antes e a outra posição depois de impulsionado ligeiro desvio. A primeira posição (curva 2) se encontra em equilíbrio instável, validade da condição (I.4), e a segunda (curva 3) em equilíbrio estável.

Outra conclusão é que o tipo de deformação da estrutura, ao flambar, é diferente do que vinha sendo apresentado até então, para carregamentos inferiores ao crítico: antes de P_{cr} havia só deformação axial; após P_{cr} poderá ocorrer também rotação.

CASO 2 - Problema de Estabilidade sem Bifurcação de Equilíbrio

Um corpo é submetido a uma carga P crescente de zero até atingir o valor crítico. O que caracteriza o problema é que atingido o P_{cr} , não é mais possível o equilíbrio estável entre o momento das forças internas e o das forças externas; neste problema o tipo de deformação da peça estrutural é o mesmo que vinha sendo apresentado para carregamentos inferiores ao crítico.

O exemplo mais usual é o de uma peça reta submetida a uma carga de compressão excêntrica (Figura I.8). Vamos admitir que o material seja elasto-plástico ideal. Para este tipo de problema assim que P é aumentado a partir de zero surge logo desvio lateral, como Figura I.9, que aumenta até P atin

gir o valor máximo (valor crítico). Até então o momento de resistência interno resiste ao momento externo: $M_R = P_{cr} (e + f_{cr})$.

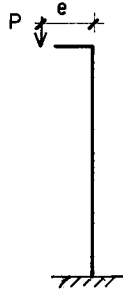


Fig. 1.8

Esta resistência interna é esgotada tão logo P alcance P_{cr} e a seção mais solicitada, já atingido o escoamento, a distribuição de tensões na seção não consegue mais satisfazer as 2 condições:

$$\int \sigma \, dS = P \quad \text{e} \quad \int \sigma \, y \, dS = M$$



Fig. 1.9

Para valores de carga menores que P_{cr} o estado de equilíbrio é estável.

Para $P = P_{cr}$ o equilíbrio será indiferente. Neste último estágio o estado de plastificação da seção é bem

avanzado e para qualquer pequeno acréscimo de carga o momento interno cresce muito pouco, menos que o externo, não havendo em tão possibilidade de equilíbrio; a peça entra em ruína.

A única hipótese de haver equilíbrio se a deforção lateral aumenta é a de reduzir a carga P_{cr} simultaneamente ao acréscimo de deformação.

Teremos então um pequeno ramo em que o equilíbrio é instável (curva 2) como no gráfico abaixo (Figura I.10), em que os deslocamentos passariam a grandezas muito superiores às deformações unitárias.

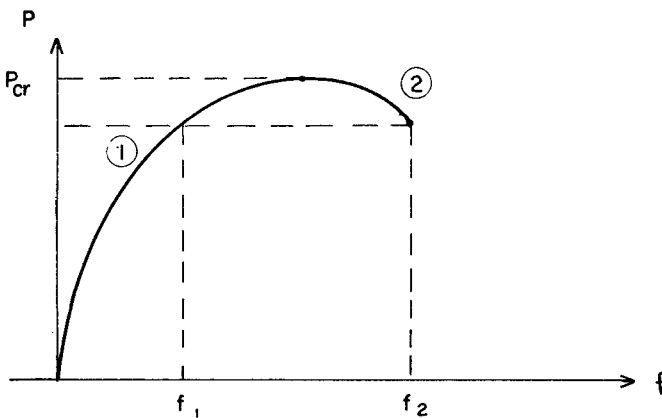


Fig. I.10

CASO 2.1 - Como um sub-item apresentamos um problema de tensões. Exem plo: peças menos esbeltas de concreto armado submetidas a carga excêntrica de compressão, em que antes mesmo de ocorrer deformação devido à carga crítica (P_{cr}), há ruína da peça por

ter atingido esforço solicitante de ruptura não suportado pela seção transversal.

Outro exemplo que se enquadra como problema de estabilidade sem bifurcação de equilíbrio é o de uma peça delgada sujeita a momentos nas extremidades atuando na direção de maior inércia, quando o eixo não é perfeitamente retilíneo. Observa-se que a deformação lateral tem sempre o mesmo aspecto até que se atinja a instabilidade. Se a peça tivesse eixo retilíneo exatamente perfeito, as deformações seriam primeiramente axiais conforme Fig. I.11-b.,

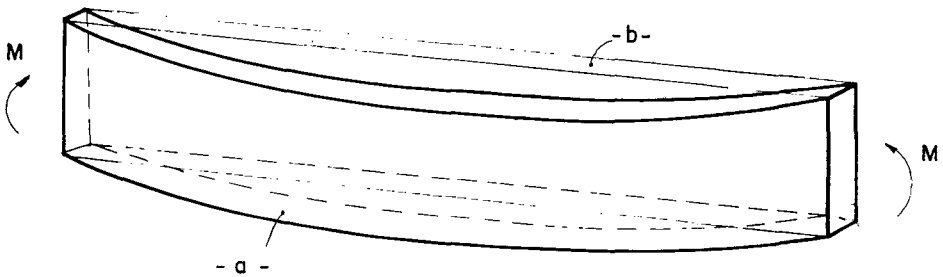


Fig. I.11

vindo em seguida com o aumento da solicitação a instabilidade que possivelmente provocaria desvios laterais (Figura I-11-a). Seria um caso de estabilidade com bifurcação de equilíbrio.

É o caso de instabilidade provocada por flexão e torção, ao mesmo tempo e será visto no Capítulo II.

Resumindo; para que haja um problema de bifurcação de equilíbrio é necessário que existam peças sem imperfeição inicial, nos casos vistos. De um modo geral diremos que a bifurcação poderá ocorrer quando o eixo for retilíneo e sem excentricidade de carga.

Na realidade, as peças utilizadas em construções já vêm sempre com certa excentricidade pelas imperfeições de fabricação, certamente inevitáveis.

Apresentamos a seguir um exemplo desenvolvido que se enquadra no CASO 2 e no CASO 1 com algumas simplificações.

Consideremos uma peça suposta ideal, isto é, sem imperfeições de eixo, porém com carga P aplicada com excentricidade e , ligada a uma mola de constante K , como se vê na Figura I.12 abaixo:

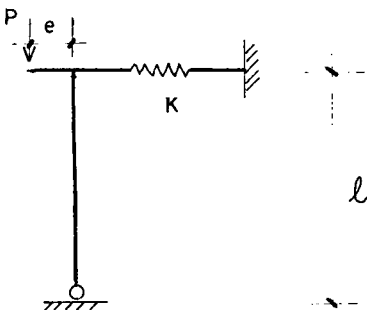


Fig. I.12

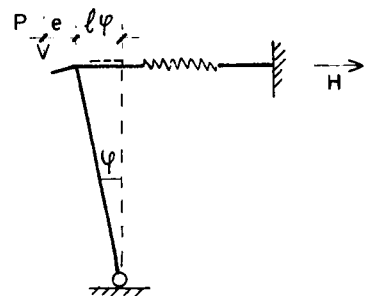


Fig. I.13

A carga P é aumentada a partir do valor zero; logo aparece desvio lateral (Figura I.13).

Sendo H a reação na mola, proporcional ao deslocamento:

$$H = K \ell \psi$$

o equilíbrio se dá de tal forma que:

$$P (e + \ell \psi) = H \ell$$

$$P (e + \ell \psi) = K \ell^2 \psi \quad (I.25)$$

donde

$$\psi = \frac{Pe}{K \ell^2 - P \ell} \quad (I.26)$$

ou

$$\psi = \frac{\frac{P}{K \ell} \frac{e}{\ell}}{1 - \frac{P}{K \ell}} \quad (I.27)$$

(P não é função linear de ψ).

Existem 2 casos distintos:

1) $e \neq 0$ - existirá ψ ; trata-se de um problema sem bifur

cação de equilíbrio como visto anteriormente.

O equilíbrio é estável para valores de P menores que o da carga crítica.

2) $e = 0$ - trata-se de problema com bifurcação de equilíbrio.

Quando a carga P atinge o valor $P = K \ell$ o valor de ψ é indeterminado podendo assumir qualquer grandeza (Vide gráfico), significando configuração indiferente (Fig. I.14).

Quando P cresce de zero até o valor crítico, o deslocamento ψ permanece nulo e com qualquer deslocamento dado à haste, ela retorna a sua posição vertical pela ação da mola. Caracteriza o equilíbrio estável.

E quando P assume valores maiores que o P_{cr} o equilíbrio é instável.

Traçando o gráfico da função

$$\frac{P}{P_{cr}} = \frac{\psi}{\psi + \frac{e}{\ell}}$$

para alguns valores de e/ℓ ; verifica-se que:

$$\lim_{e \rightarrow 0} \frac{P}{P_{cr}} = \frac{\psi}{\psi + \frac{e}{\ell}} = P_{cr} \quad (I.28)$$

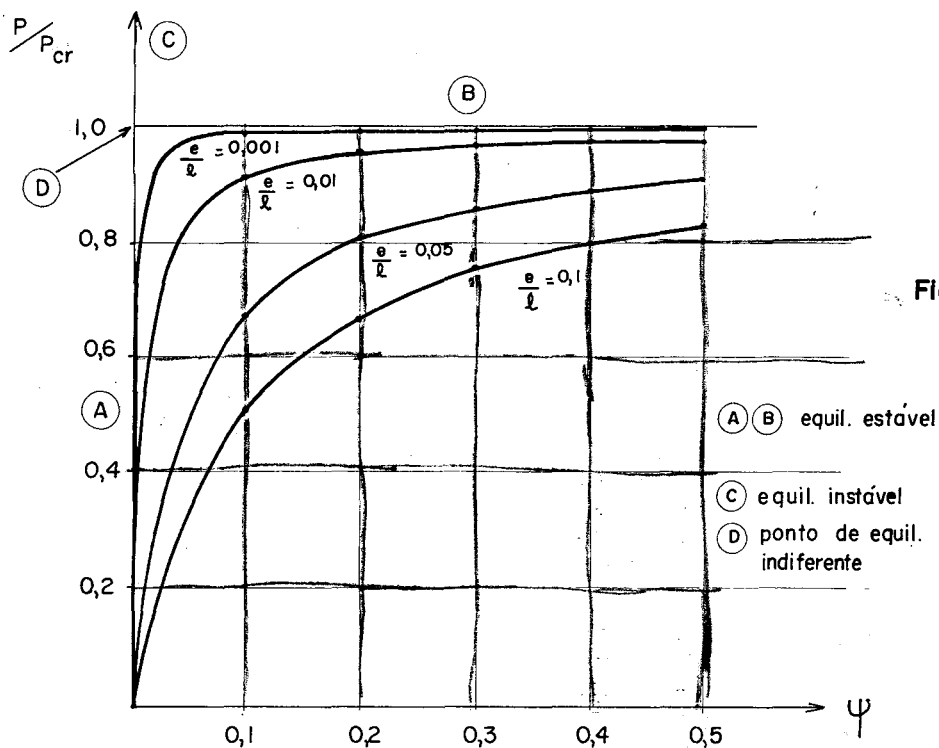


Fig. I. 14

3. PROBLEMA DE INVERSÃO DE EQUILÍBRIO COM DESCONTINUIDADE

Ocorre quando a carga não é uma função monotônica crescente, embora unívoca, de f . P cresce de zero até um certo valor P_{cr} juntamente com f . Do estado não carregado até o valor máximo alcançado, a relação entre a carga e o deslocamento torna-se menos linearizada quando mais próximo de P máximo. De um certo ponto em diante, a , da (Fig. I.15) a partir do qual, um dado aumento de carga aumenta consideravelmente a deflexão, torna-se a estrutura progressivamente menos rígida, podendo esta redução continuar até que se alcance o P máximo neste ramo da curva de equilíbrio, onde então a rigidez seja nula. Estando em equilíbrio local (estado indiferente), é viável que

para um ligeiro aumento de carga a estrutura esteja no ponto de flambar. Porém neste ponto, existe a possibilidade da peça saltar da posição f_{cr} para uma outra, procurando desta forma uma nova posição de equilíbrio estável ainda com P_{cr} .

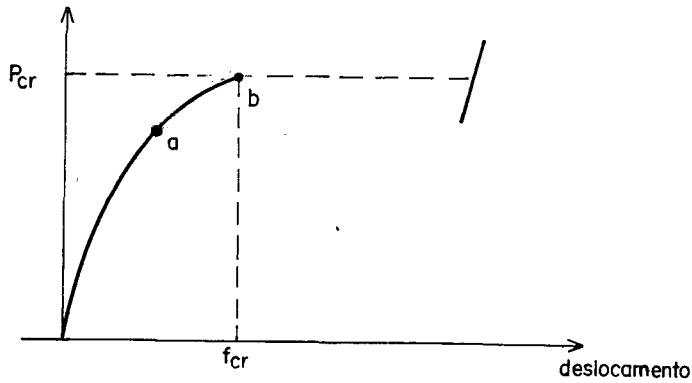


Fig. I.15

Como um exemplo temos a configuração (Fig. I.16) abaixo:

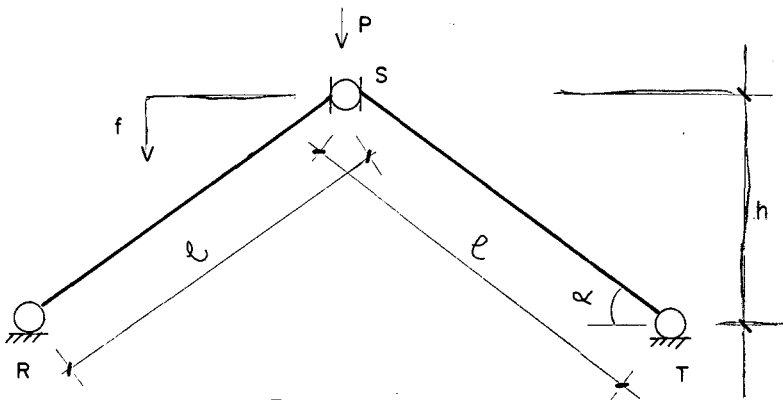


Fig. I.16 a

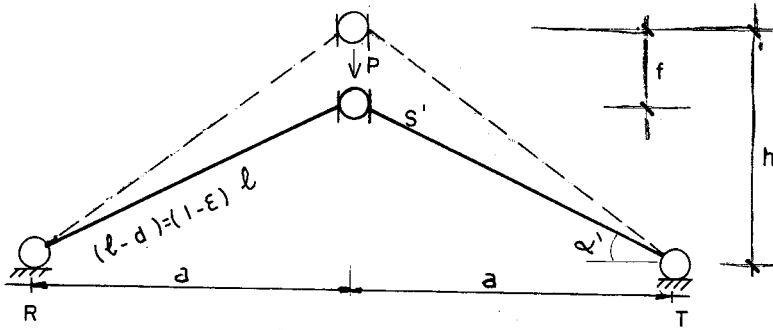


Fig. 1.16 b

Podemos escrever:

$$N = \frac{P}{2 \operatorname{sen} \alpha'} = \frac{P}{2} \frac{l (1 - \epsilon)}{(h - f)} \dots \quad (\text{I.29})$$

Do triângulo retângulo RS'T

$$a^2 + (h - f)^2 = [l (1 - \epsilon)]^2$$

$$a^2 + h^2 + f^2 - 2 hf = [l (1 - \epsilon)]^2$$

$$l^2 + f^2 - 2 hf = [l (1 - \epsilon)]^2$$

$$(1 - \epsilon) = \frac{\sqrt{l^2 + f^2 - 2 hf}}{l} \dots \quad (\text{I.30})$$

$$\epsilon = \frac{N}{EA} \quad \therefore \quad EA = \text{Rigidez da haste} \quad (\text{I.31})$$

Substituindo (I.30) em (I.29); e (I.29) em (I.31)

vem:

$$P = \frac{2EA}{\ell} (h - f) \left[\frac{\ell}{\sqrt{\ell^2 - 2hf + f^2}} - 1 \right] \quad (I.32)$$

O gráfico da Figura I.17 representa a função

$P(f)$:

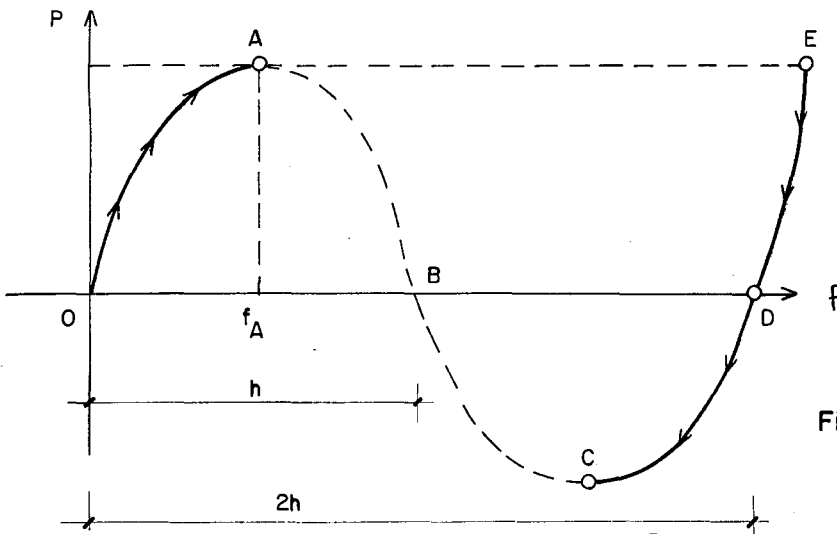


Fig. I.17

A medida que P aumenta a partir de zero, o deslocamento f cresce tornando a configuração cada vez mais achatada; f continua crescendo até atingir uma posição f_A , a partir da qual não há mais possibilidade de aumentar o valor da carga. Este ponto corresponde ao valor de P máximo para o qual a primeira derivada de $P(f)$ é nula, e define um equilí-

brio indiferente.

A um leve ultrapassar desta posição o sistema atinge rapidamente uma nova posição de equilíbrio estável no ponto E, de maneira brusca, mantendo o valor P máximo alcançado. Para mover a peça para tal estado de equilíbrio envolve-se uma deformação muito grande e os efeitos dinâmicos nesta troca de estado de equilíbrio exigem quantidades consideráveis de transferência de energia que ocorrem violentamente.

Alguns autores, com razões óbvias, chamam ao brusco movimento de, "snap action" ou "snap through", que realmente se assemelha a um rompimento; a perda de estabilidade é conhecida também como "snap buckling" (*).

A carga limite ou carga máxima de flambagem, como nós a chamamos, é referida como "snap buckling load".

A Figura I.18 a-b-c-d-e é ilustrativa: apresenta passagem da estrutura à nova posição E e seu comportamento quando a carga é diminuída até zero, alcançando aí a posição D do gráfico e também quando a partir daí é aumentada até atingir o valor de (P_{cr}) - posição C, assumindo uma configuração, diga

(*) Estamos usando terminologia inglesa pela inexistência ainda de consenso em termos do nosso vernáculo, para o assunto focalizado.

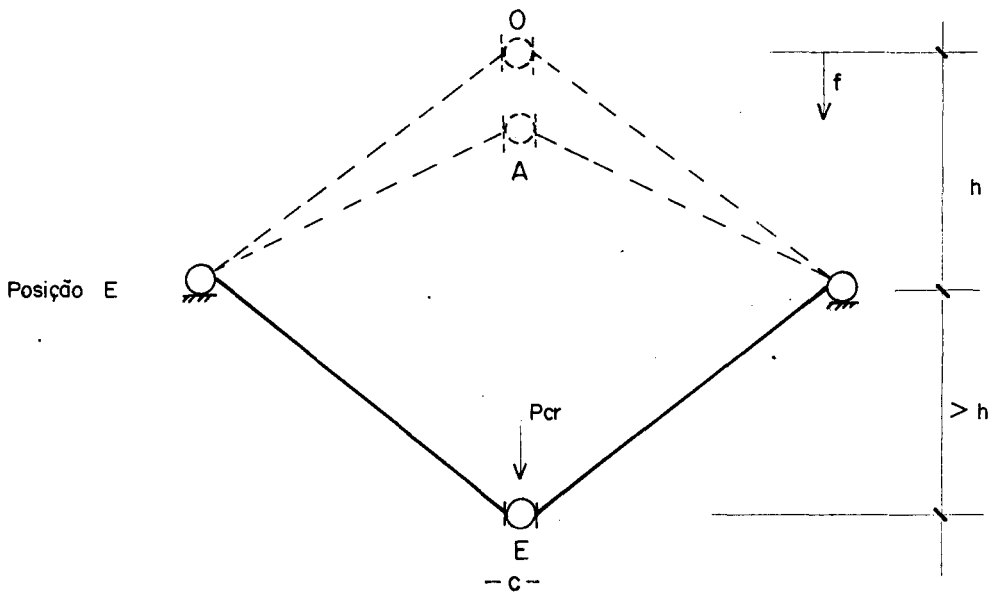
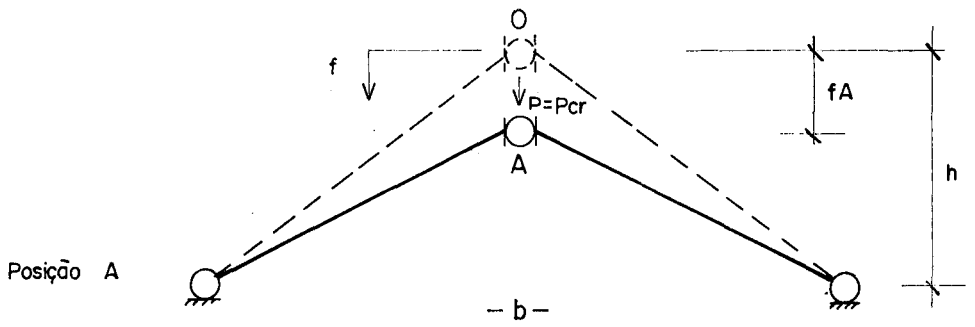
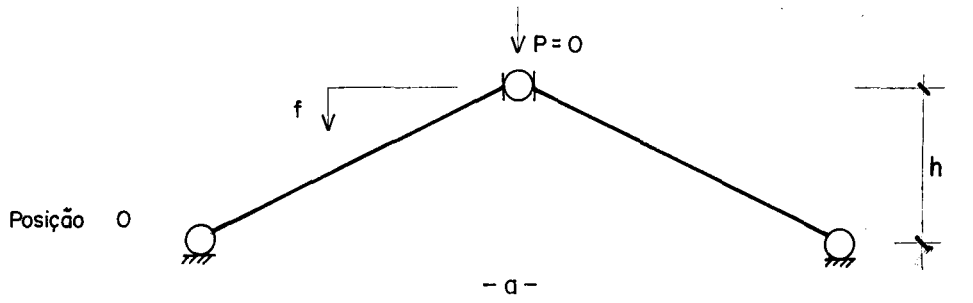


Fig. 1.18

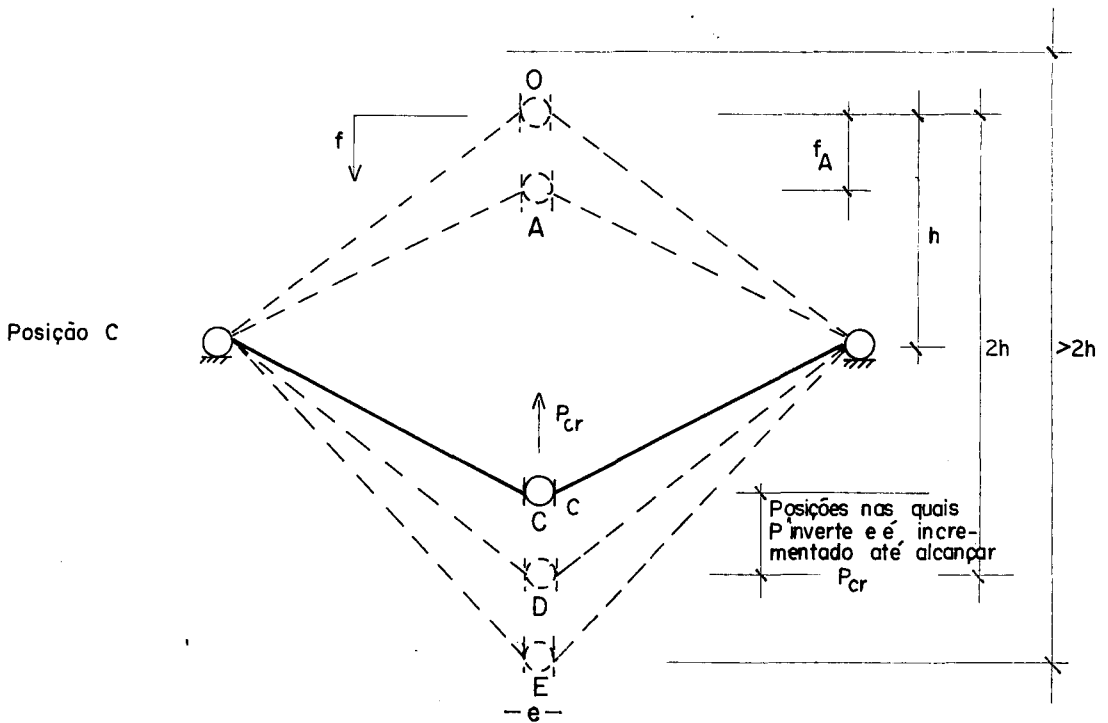
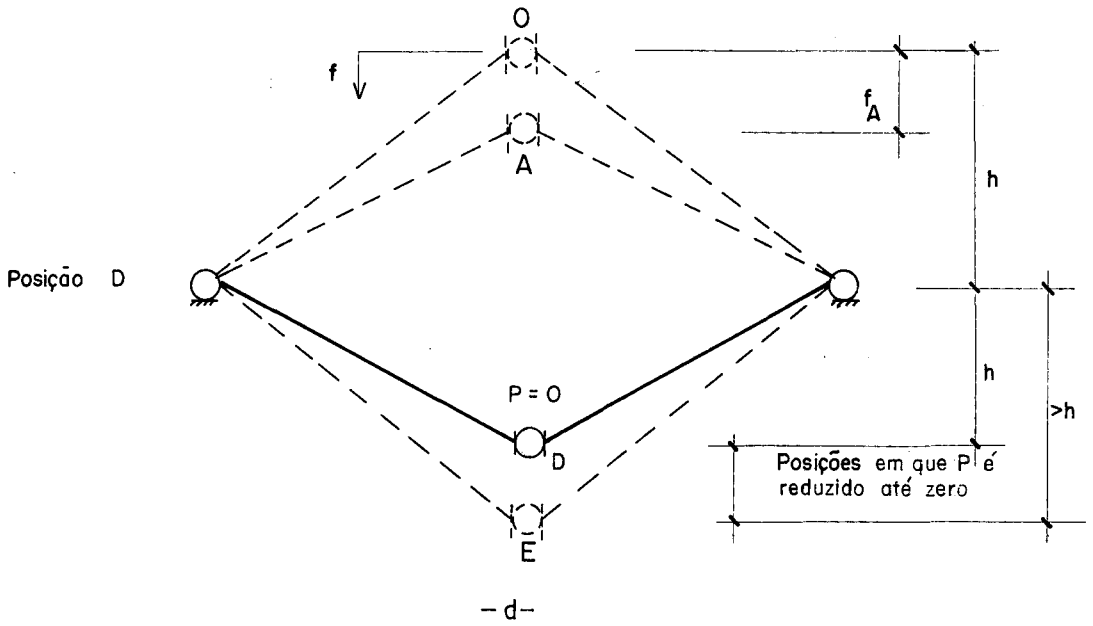


Fig. 1.18

mos, proximamente simétrica à da posição A, em relação ao eixo que une as rótulas de apoio.

Estes problemas são chamados de inversão de equilíbrio com descontinuidade, porque houve, no caso apresentado, uma inversão de esforços nas hastes entre os pontos A e E. Antes estavam solicitadas à compressão e depois a tração; tal inversão se deu bruscamente, e com descontinuidade.

O exemplo anteriormente apresentado, constitui caso particular em que a constante de mola é infinita no modelo abaixo (Figura I.19).

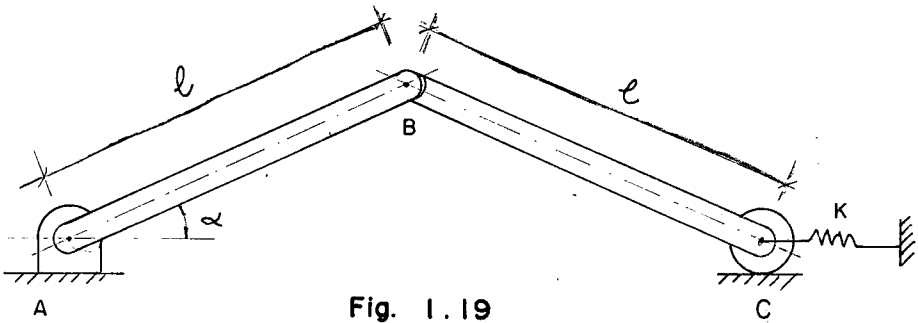


Fig. I.19

Tem sido testado em laboratório e seu comportamento é diferente quando a forma de carregamento, usada para simular o modelo, tem características diversas.

Vejamos os resultados obtidos em laboratório na

situação da Figura I.20, para duas formas de carregamento:

- 1- Modelo carregado por força (Figura I.21);
- 2- Modelo carregado por deslocamento (Figura I.22) (*)

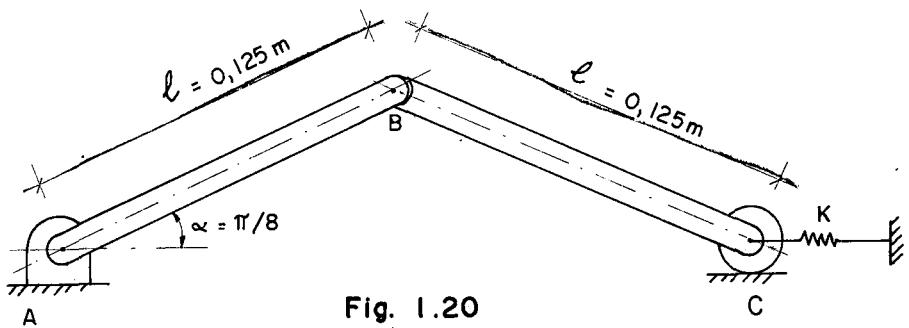


Fig. I.20

OBSERVAÇÃO:

O modelo conserva-se na configuração inicial de $\alpha = \frac{\pi}{8}$ através de suas hastes pretendidas de 4170 N cada, que prevê um efeito de resistência ao movimento horizontal.

1) Modelo Carregado por Força

A carga vertical P é aplicada e o deslocamento,

(*) Vide Croll and Walker - Elements of Structural Stability, Ed. Mac Millan, 1972, pp. 36.e seguintes.

caracterizado pela variação angular θ da haste AB, é medido, a cada P diferente (Figura I.21)

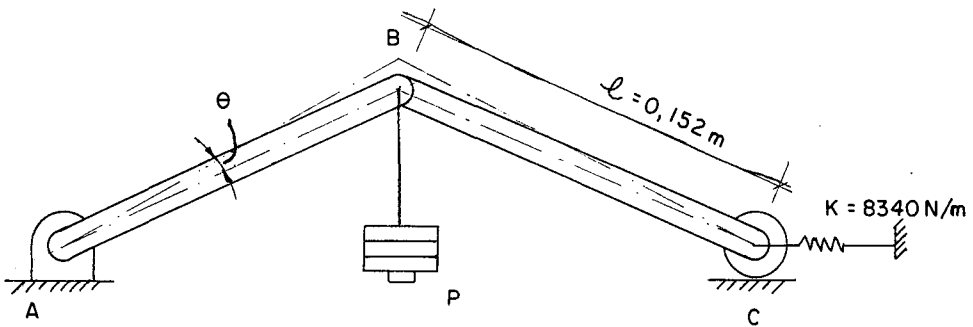


Fig. I.21

O comportamento do modelo até então demonstra uma curva carga x deflexão, típica para o caso de $\alpha_{\text{inicial}} = \pi/8$ como na Figura I.22.

Constata-se que a rigidez nesta porção inicial da curva de equilíbrio, decresce tão logo P ultrapassa 45 N, porque para pequenos acréscimos de carga são evidentes as deformações. A rigidez torna-se nula para $P = 58$ N. A perda da estabilidade do modelo em a é acompanhada por um violento deslocamento dinâmico do estado de equilíbrio a, seguido por uma oscilação de alta frequência, que gradativamente é reduzida até o repouso na nova posição de equilíbrio e, como já descrito no exemplo anterior.

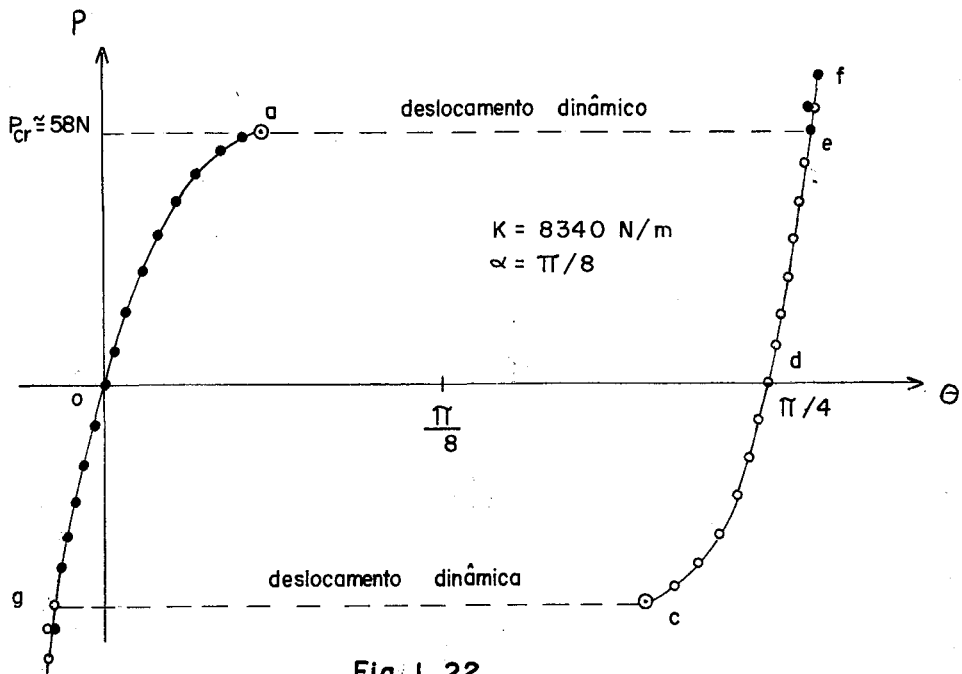


Fig. 1.22

Constatou-se também que neste ponto para um aumento de carga resulta uma resistente curva de equilíbrio ef. Reduzido os valores da carga P evidencia-se a redução da rigidez até atingir o ponto c então o modelo flamba para a posição g da mesma forma ocorrida em a \rightarrow e. Resultado importante além do relatado no exemplo anterior, é que a peça volta à uma configuração um pouco acima da inicial $(-\theta)$ com carregamento de (-58 N) . Existe realmente uma simetria entre as curvas goa e edc. Na posição d, o modelo está em equilíbrio com carga $P = 0$ e $\theta = 2\alpha$, que é a geometria inicial invertida.

Vemos a seguir uma demonstração analítica do comportamento da peça neste modelo carregado por força.

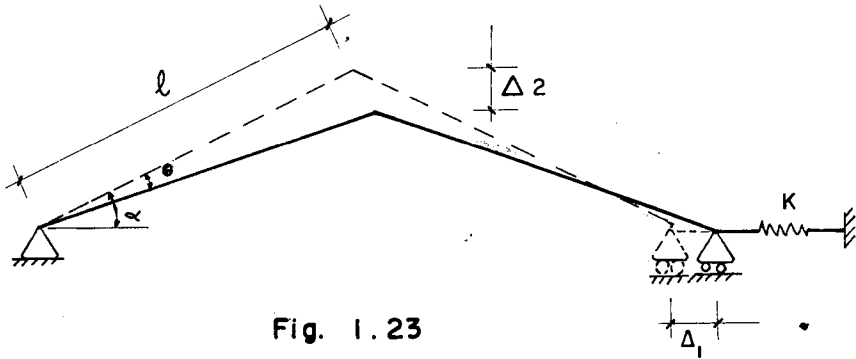


Fig. 1.23

Temos:

$$\Delta_1 = 2 \ell \left[\cos (\alpha - \theta) - \cos \alpha \right] \dots\dots (I.33)$$

$$\Delta_2 = \ell \left[\sin \alpha - \sin (\alpha - \theta) \right] \dots\dots (I.34)$$

Considerando a posição inicial $(P, \theta) = (0, 0)$ como referencial de energia, a energia potencial total na posição deslocada é:

$$V = \frac{1}{2} K \Delta_1^2 - P \Delta_2 \dots\dots (I.35)$$

Com (I.33) e (I.34) em (I.35) temos:

$$V = 2 K \ell^2 \left[\cos (\alpha - \theta) - \cos \alpha \right]^2 - P \ell \left[\sin \alpha - \sin (\alpha - \theta) \right] \quad (I.36)$$

que é a função que define o estado de equilíbrio do modelo, e:

$$\frac{dV}{d\theta} = 4 K \ell^2 \left[\cos (\alpha - \theta) - \cos \alpha \right] \operatorname{sen} (\alpha - \theta) - P \ell \cos (\alpha - \theta) = 0 \quad (\text{I.37})$$

define a carga crítica ou estacionária:

$$P = 4 K \ell \left[\cos (\alpha - \theta) - \cos \alpha \right] \frac{\operatorname{sen} (\alpha - \theta)}{\cos (\alpha - \theta)} \quad (\text{I.38})$$

$$\text{Chamando } p = \frac{P}{4 K \ell} \quad (\text{I.39})$$

$$p = \left[\cos (\alpha - \theta) - \cos \alpha \right] \frac{\operatorname{sen} (\alpha - \theta)}{\cos (\alpha - \theta)} \quad (\text{I.40})$$

Prosseguindo: a partir de (I.37) usando (I.39) e (I.40):

$$\frac{d^2V}{d\theta^2} = 4 K \ell^2 \left[\frac{\cos \alpha - \cos^3 (\alpha - \theta)}{\cos (\alpha - \theta)} \right] \quad (\text{I.41})$$

Restrição de que $|\alpha - \theta| < \pi/2$

$$\frac{d^2V}{d\theta^2} \begin{cases} > 0 & \text{quando } \cos^3 (\alpha - \theta) < \cos \alpha & (\text{eq. estável}) \\ = 0 & \text{quando } \cos^3 (\alpha - \theta) = \cos \alpha & (\text{eq. indiferente}) \\ < 0 & \text{quando } \cos^3 (\alpha - \theta) > \cos \alpha & (\text{eq. instável}) \end{cases}$$

Para $\cos^3 (\alpha - \theta) = \cos \alpha$, onde $\alpha = \pi/8$ tem-se que:

$$\theta = \frac{\pi}{8} \pm \cos^{-1} \left[\cos \pi/8 \right]^{1/3} = \begin{cases} 0,053 \pi \\ e \\ 0,197 \pi \end{cases}$$

\Rightarrow equilíbrio indiferente.

Para $\theta < 0,053\pi$ e $\theta > 0,197\pi$, $\frac{d^2V}{d\theta^2}$ é positivo

\Rightarrow equilíbrio estável.

Para $0,053\pi < \theta < 0,197\pi$, $\frac{d^2V}{d\theta^2}$ é negativo

\Rightarrow equilíbrio instável.

Analisando a rigidez S:

$$S = \frac{dp}{d\delta} = \frac{dp}{d\theta} / \frac{d\delta}{d\theta}$$

$$\frac{dp}{d\theta} = \text{é conhecido}$$

δ = deslocamento na direção da carga por un
dade de comprimento da haste

$$\delta = \frac{\Delta_2}{\ell}$$

Logo:

$$S = \frac{\cos \alpha - \cos^3 (\alpha - \theta)}{\cos^3 (\alpha - \theta)} \quad (\text{I.42})$$

As condições para $S > 0$; $S = 0$; $S < 0$ condições estas de equilíbrio estável, indiferente e instável, respectivamente, são as mesmas já determinadas pela energia.

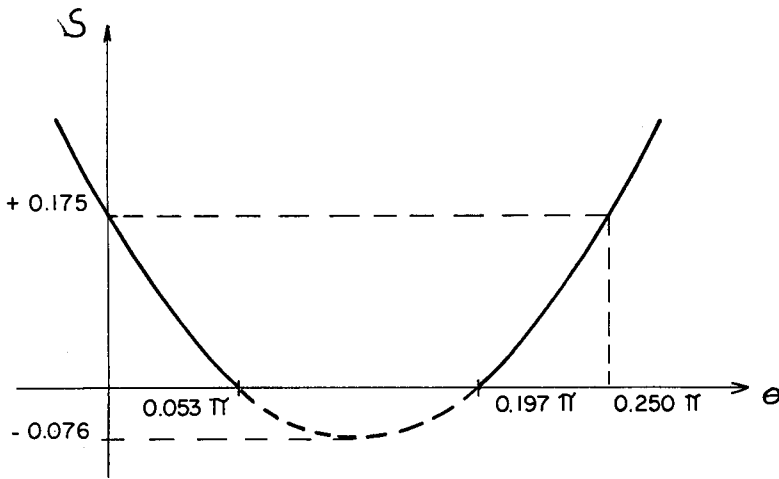


Fig. I. 24

2) Modelo Carregado por Controle de Deformação

Uma das formas de carregamento desta espécie está mostrado na Figura I.25 e a situação de análise é a mesma

anterior, isto é, $\alpha = \frac{\pi}{8}$.

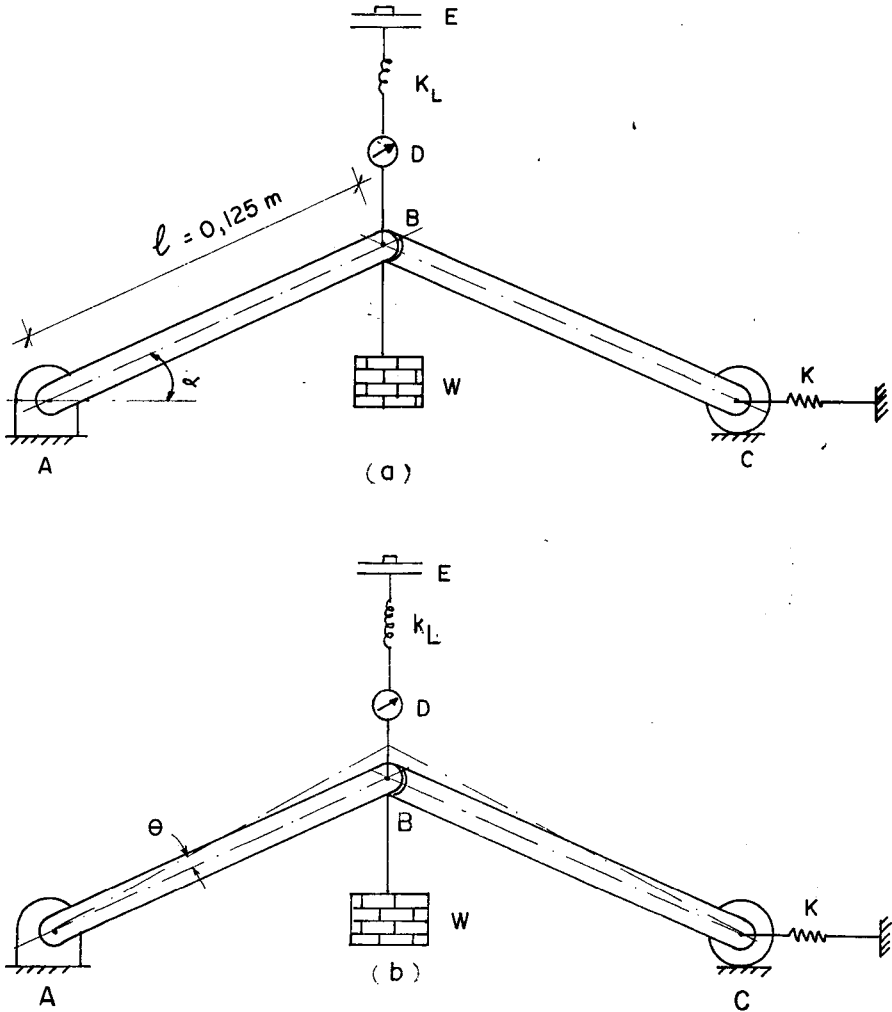
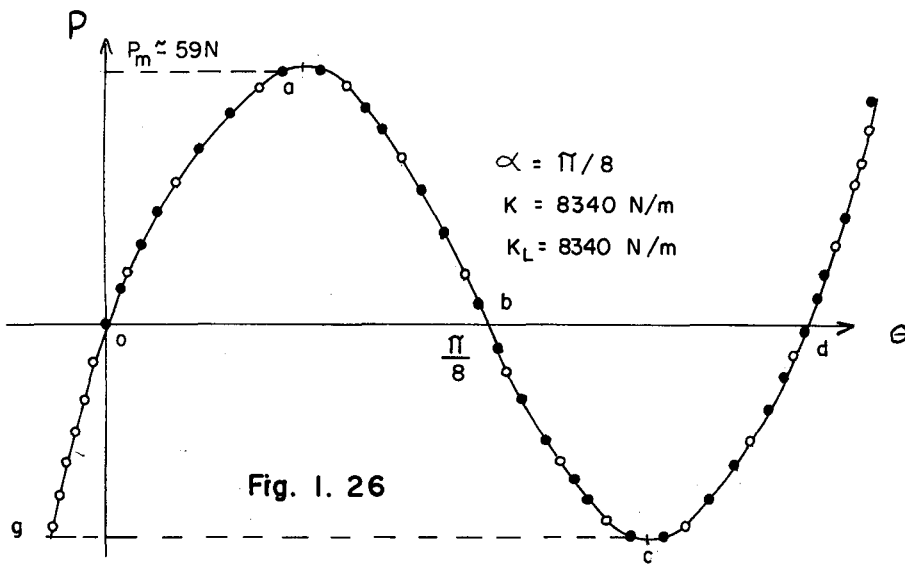


Fig. 1.25

Um contrapeso W é aplicado em B ao invés da carga P , e um dispositivo aparafusado em E é usado primeiramente para sustentar W e em seguida para controlar o deslocamento vertical do ponto B . A carga P atuante, no sistema é medida pela diferença entre o contrapeso e a carga lida na célula D . Para garantir que a célula estará sempre sujeita a for

ças de tração o contrapeso deve ser suficientemente grande.

Para este modelo os resultados de carga lidos foram plotados em função da posição θ , como se vê na Figura I.26.



Como se vê os ramos de curva goa e cde são semelhantes para os dois modelos. Porém no atual, de carregamento para deslocamento, a curva de equilíbrio é contínua. Não há perda de estabilidade quando a carga P atinge o seu máximo no ponto a e pode, talvez, haver um estado de equilíbrio entre posições a e c, o que para o modelo carregado por força era evidentemente um equilíbrio instável.

Neste ensaio, quando as hastes estão em posição horizontal, tem-se um exemplo do fenômeno físico do equilíbrio instável do modelo anterior. Nesta posição b a carga P é zero e as hastes estão sujeitas apenas à força axial devido à

compressão da mola C; observou-se porém que ligeira perturbação externa (como balanço da mesa de repouso do modelo) faz com que a estrutura salte violentamente para as posições o ou d.

Isso não ocorreria, neste modelo, se não fosse a existência de pequenas forças de atrito, sem as quais não se evitam pequenas perturbações que estabelecem o estado de equilíbrio instável.

A fim de relacionar a experiência com dados teóricos, damos a seguir uma rápida demonstração analítica do comportamento da peça neste modelo carregado por controle de deslocamento.

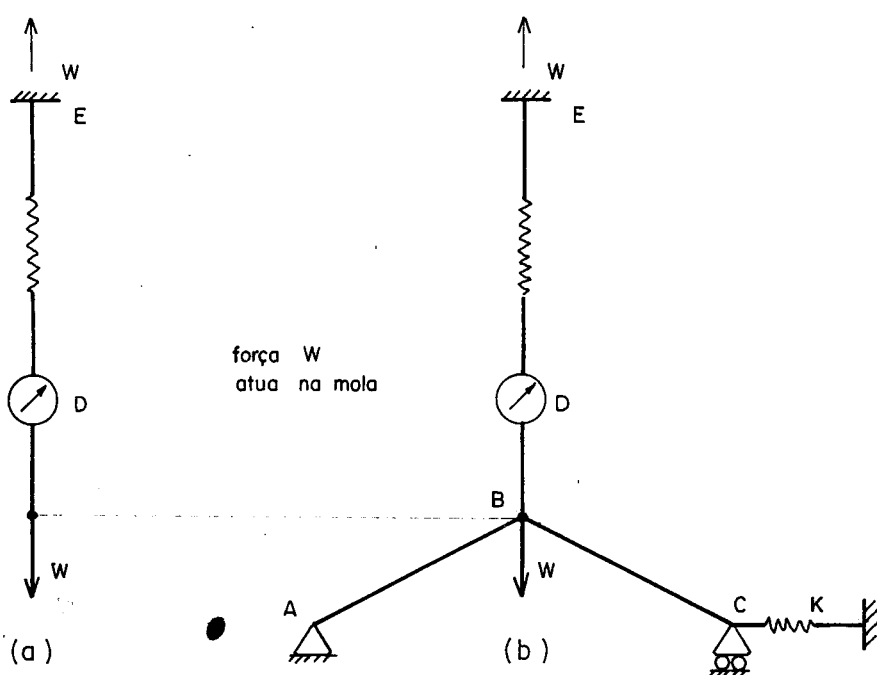


Fig. I. 27

Suponhamos em equilíbrio o conjunto E-D-W, conforme Figura I.27-a. Isso posto, mostamos as hastes AB e BC conforme b na mesma figura, sem solicitação portanto nelas. Baixando E de Δ_L , B descenderá de Δ_2 , aliviando a mola de $P = K_L (\Delta_L - \Delta_2)$, força que passará a atuar na estrutura.

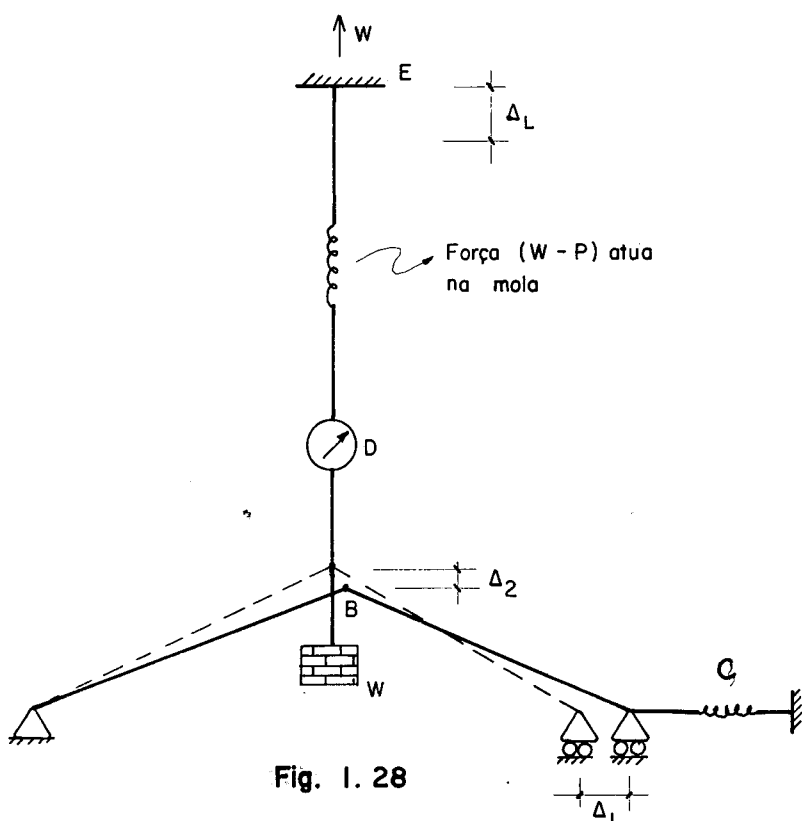


Fig. I. 28

A energia total absorvida pelo modelo é a soma das seguintes parcelas:

a) Dispositivo

$$= -\frac{1}{2} W (\Delta_L - \Delta_2) - \frac{1}{2} \left[(W - P) (\Delta_L - \Delta_2) \right] = -\frac{1}{2} (2W - P) (\Delta_L - \Delta_2) \quad (I.43)$$

b) Mola C

$$\frac{1}{2} K \Delta_1^2 \quad (I.44)$$

c) Troca de Elevação do Contrapeso

$$- W \Delta_2 \quad (I.45)$$

Resulta:

$$V = \frac{1}{2} K \Delta_1^2 + \frac{1}{2} P (\Delta_L - \Delta_2) - W \Delta_L \quad (I.46)$$

Substituindo a Eq. (I.33), (I.34) em (I.46) obtemos:

$$V = 2K\ell^2 \left[\cos(\alpha - \theta) - \cos \alpha \right]^2 + \frac{1}{2} K_L \left[\Delta_L - \ell (\sin \alpha - \sin(\alpha - \theta)) \right]^2 - W \Delta_L \quad (I.47)$$

Donde a 1.^a derivada:

$$\frac{dV}{d\theta} = 4K\ell^2 \left[\cos(\alpha - \theta) - \cos \alpha \right] \sin(\alpha - \theta) - K_L \ell (\Delta_L - \Delta_2) \cos(\alpha - \theta) \quad (I.48)$$

Juntando a (I.48), $P = K_L (\Delta_L - \Delta_2)$ obtém-se a (Eq. I.37) relativa ao modelo carregado da Fig. I.21, como era de se esperar.

Obtendo-se a 2.^a derivada a partir da Eq. (I.48):

$$\frac{d^2V}{d\theta^2} = 4 K \ell^2 \left[\sin^2 (\alpha - \theta) - \cos (\alpha - \theta) (\cos (\alpha - \theta) - \cos \alpha) \right] -$$

$$K_L \ell \left[(\Delta_L - \ell (\sin \alpha - \sin (\alpha - \theta))) \sin (\alpha - \theta) - \ell \cos^2 (\alpha - \theta) \right]$$

(I.49)

Chamando $k_L = \frac{K_L}{4K}$ e feitas transformações extensas tem-se:

$$\frac{d^2V}{d\theta^2} = 4 K \ell^2 \left[\frac{\cos \alpha - \cos^3 (\alpha - \theta) + K_L \cos^3 (\alpha - \theta)}{\cos (\alpha - \theta)} \right] = 0$$

(I.50)

cuja validade restringe-se a $|\alpha - \theta| < \pi/2$. Da Eq. (I.50) obtemos o quadro a seguir:

		$K_L < 1$	$K_L > 1$
Eq. estável	$\cos^3 (\alpha - \theta)$	$< \frac{1}{1 - K_L} \cos \alpha$	$> \frac{1}{1 - K_L} \cos \alpha$
Eq. indiferente	$\cos^3 (\alpha - \theta)$	$= \frac{1}{1 - K_L} \cos \alpha$	$= \frac{1}{1 - K_L} \cos \alpha$
Eq. instável	$\cos^3 (\alpha - \theta)$	$> \frac{1}{1 - K_L} \cos \alpha$	$< \frac{1}{1 - K_L} \cos \alpha$

Se tivermos $K_L = 0$ recaímos no modelo anterior Eq. (I.41) com $\Delta_L = 0$ conforme Figura I.21 gráfico de estabilidade (Figura I.22) em que não existe rigidez de mola. Se ao contrário $k_L = \infty$, $\cos^3 (\alpha - \theta) < 0$ será sempre atendida para qualquer posição θ desde que $|\alpha - \theta| < \pi/2$.

Considerando um certo valor k_L intermediário teremos certamente que a partir de um ponto entre a e b na Figura I.26, o modelo estará em equilíbrio instável.

No modelo apresentado, em que $\alpha = \pi/8$, supõe-se K_L valor tal que não promova equilíbrio instável entre a e c. Correspondente à posição b, equivalente a $\theta = \frac{\pi}{8}$ como se vê na Figura I.26:

Assim sendo:

$$\cos^3 (\alpha - \theta) = \frac{1}{1 - K_L} \cos \alpha$$

Resulta:

$$1 = \frac{1}{1 - K_L} \cos \pi/8$$

Donde:

$$K_L = 0,076$$

Observe que se $K_L < 0,076$ teremos duas raízes o que tornará a curva de equilíbrio anti-simétrica, em relação à vertical passando por b (Figura I.29).

Como conclusão temos que a instabilidade do modelo atual depende basicamente do fator K_L que está intimamente relacionado com a rigidez da mola usada no dispositivo E.

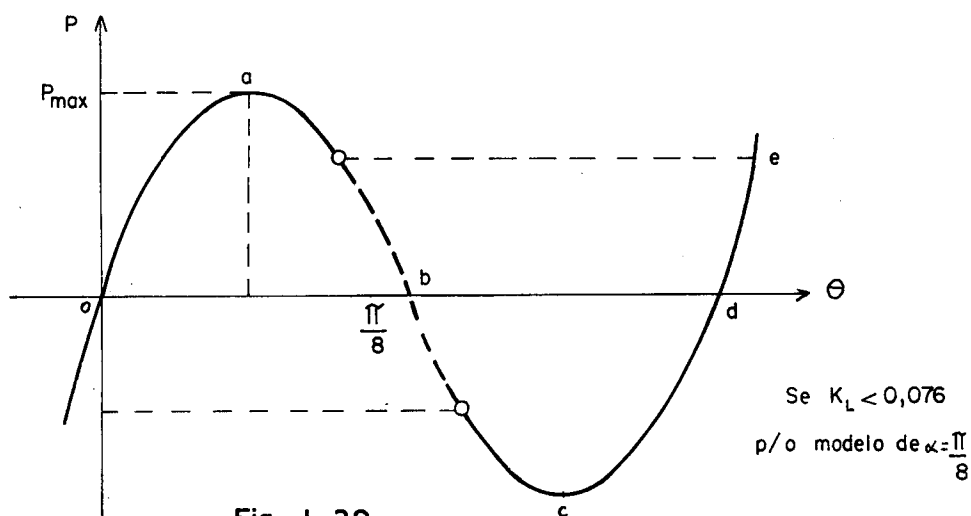


Fig. I. 29

Estes dois exemplos, nos materiais elásticos usa dos na construção, isto é, excluindo-se borracha, gelatinas e plásticos dão bem uma indicação da aplicabilidade da conclusão de Bryan: basta mostrar que os deslocamentos extremos são sempre bem maiores que os encurtamentos nas hastes.

CAPÍTULO II

FORMULAÇÃO DAS EQUAÇÕES NA FASE ELÁSTICA

2.1 - APRESENTAÇÃO EM HASTES RETAS

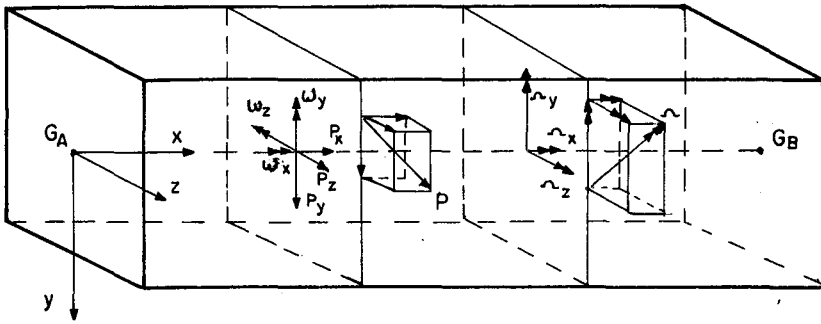


Fig.II.1

Qualquer esforço a que uma peça esteja sendo sujeita em sua superfície externa pode ser equivalentemente substituído por suas componentes segundo seus eixos e transferidos para o centro de gravidade da seção juntamente com os conjugados. A Figura acima ilustra o que foi dito (*).

(*) A haste será resolvida considerando carregamentos individuais

Uma vez conhecidas as reações da extremidade da haste reta (Ver Figura II.2), as solicitações numa seção qualquer resultam das expressões abaixo:

$$\text{Força Normal:} \quad N = H_A + \Sigma P_x$$

$$\text{Cortante Vertical:} \quad C = V_A + \Sigma P_y$$

$$\text{Cortante Horizontal:} \quad L = L_A + \Sigma P_z$$

(II.1) (*)

Flexão no Plano Vertical:

$$M = M_A + \Sigma \omega_z + \Sigma \Omega_z + \Sigma M_0$$

Flexão no Plano Horizontal:

$$D = D_A + \Sigma \omega_y + \Sigma \Omega_y + \Sigma D_0$$

Torção

$$T = T_A + \Sigma \omega_x + \Sigma \Omega_x$$

Mais adiante utilizaremos alguns dos valores acima, levando-se em conta os deslocamentos da haste após o Kippe.

A equação diferencial será formulada para o caso

(*) Sendo ΣM_0 e ΣD_0 o momento das cargas verticais e horizontais respectivamente, em relação à seção, incluindo o momento das reações.

geral de uma haste reta espacialmente engastada nas duas extremidades, tendo reações denominadas como abaixo:

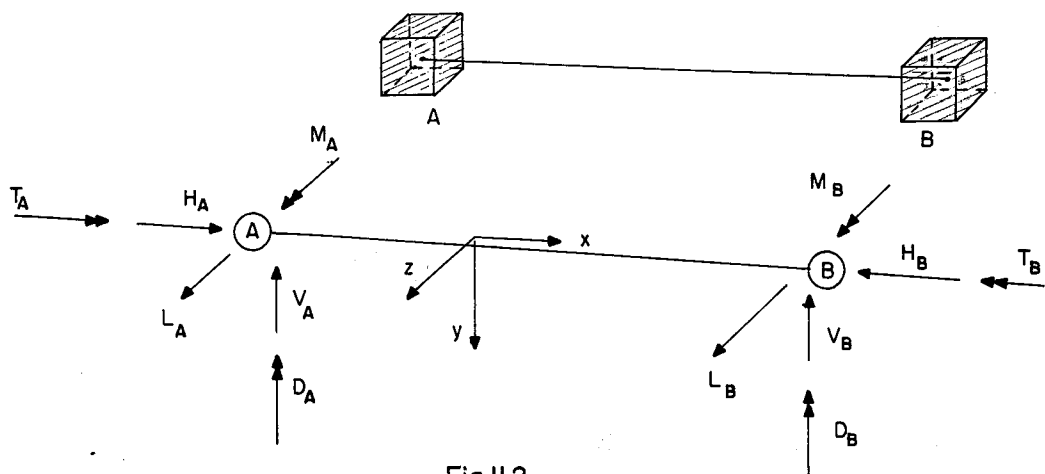


Fig.II.2

Como sô consideraremos carregamentos verticais (direção y) podemos afirmar que as reações na direção do eixo x são nulas ($H_A = H_B = 0$). Assim sendo cada apoio terá somente cinco reações.

Como já foi visto anteriormente o comportamento e a configuração de uma peça depende muito do carregamento e das condições de bordo.

Para uma haste sujeita ao carregamento como se vê na Figura II.3-a, ter-se-ã configuração deformada e/ou flam-bada em b.

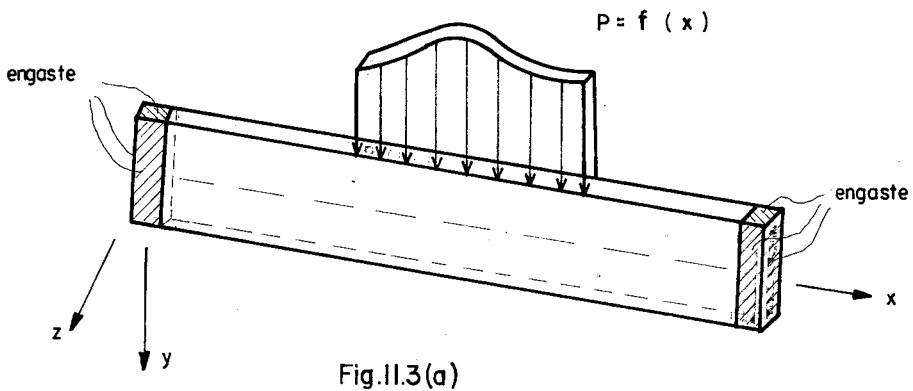


Fig.II.3(a)

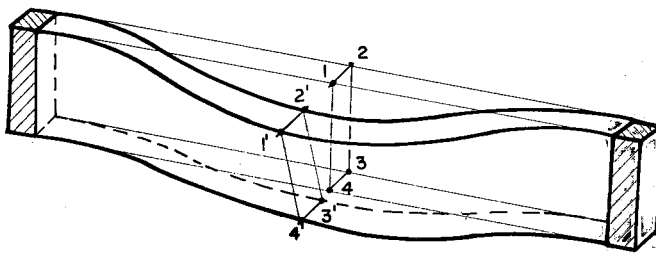
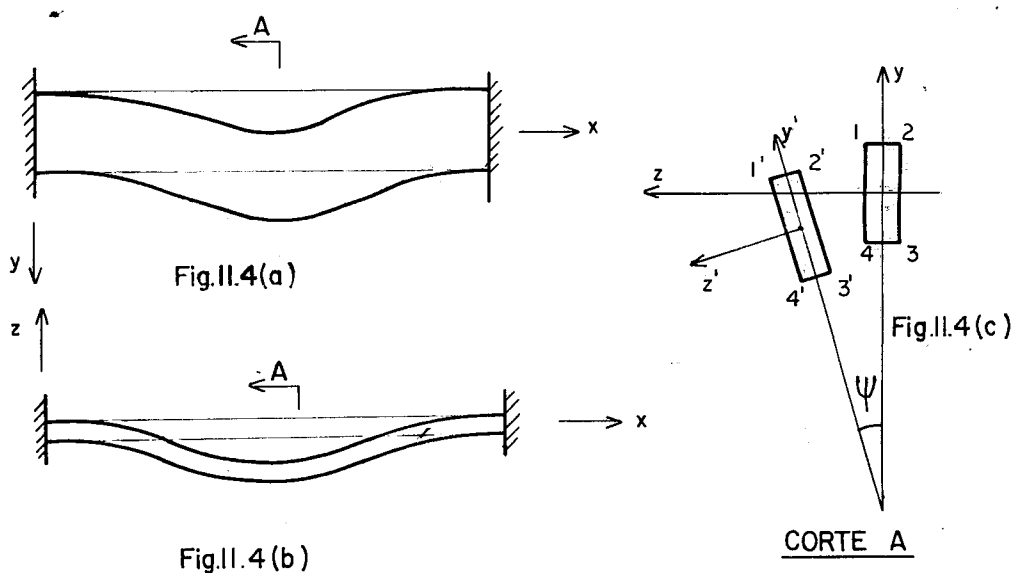


Fig.II.3(b)

A seção transversal da viga apresenta momentos de inércia bem diferentes, em relação aos seus dois eixos principais de inércia. A flexão se dá no plano de maior resistência da peça. Para vãos suficientemente grandes a peça pode se tornar instável e para ligeiras perturbações as tensões de compressão que atuam na parte superior da seção tendem a provocar flexão lateral da peça, arrastando também, a parte tracionada. Esta, tende a conter o desvio lateral, ocorrendo então um afastamento não uniforme ao longo da altura da seção, com isto surge ligeira torção como se vê nas Figuras II.3-b e II.4-c.



Experiências confirmam a configuração da posição de equilíbrio conforme Fig. II.4-a, e também sua nova posição, após flambada, conforme Figura II.4-b-c, se desviada lateralmente e sem condições de retorno.

O que acontece é que as imperfeições naturais do eixo da peça atuam como desvios impostos que imprimem a peça a situação (Fig.II.4-b-c) onde se encontra com flambagem lateral ou Kippe.

Flambagem lateral é pois o desvio excessivo da

peça na direção transversal ao plano de atuação de carga, direção esta, geralmente com menor rigidez.

- Formulação da Equação Geral para Hastes Retas Engastadas Espacialmente e Sujeitas a Carregamentos Verticais

Considere-se dx um comprimento infinitesimal da haste flambada representada por seus eixos na Figura II.5, que mostra em b a deformada na direção y ; em c a deformada em z ; e a rotação de uma seção S em a. São representados todos os esforços nas extremidades do elemento dx .

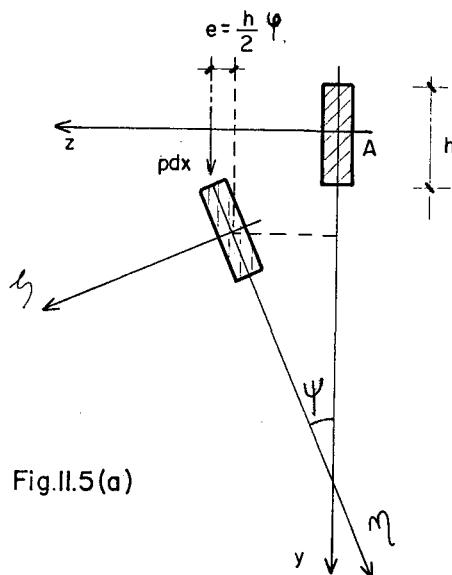


Fig.II.5(a)

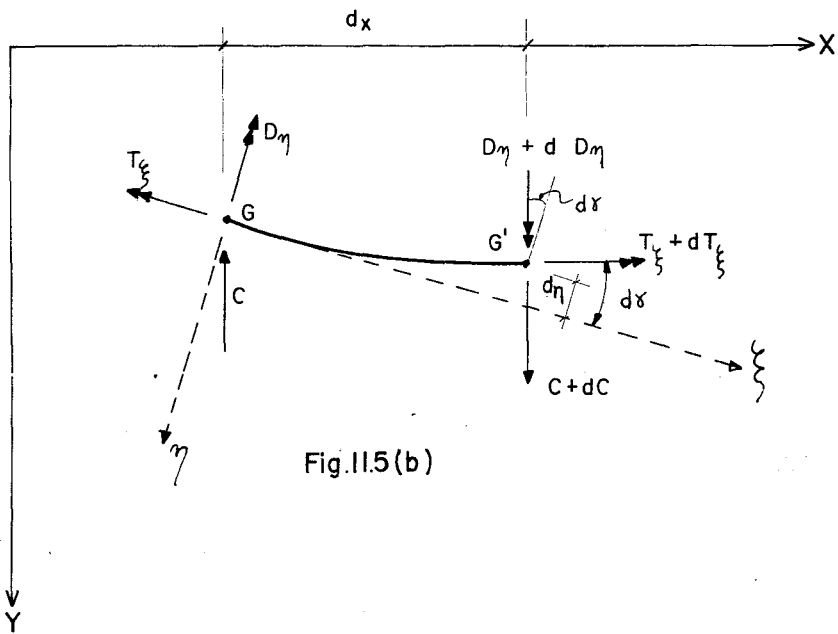


Fig. II.5(b)

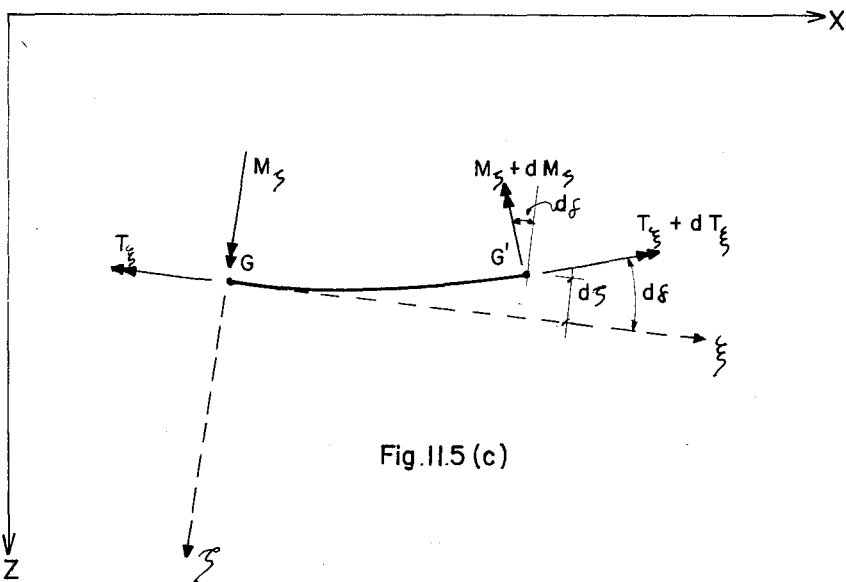


Fig. II.5(c)

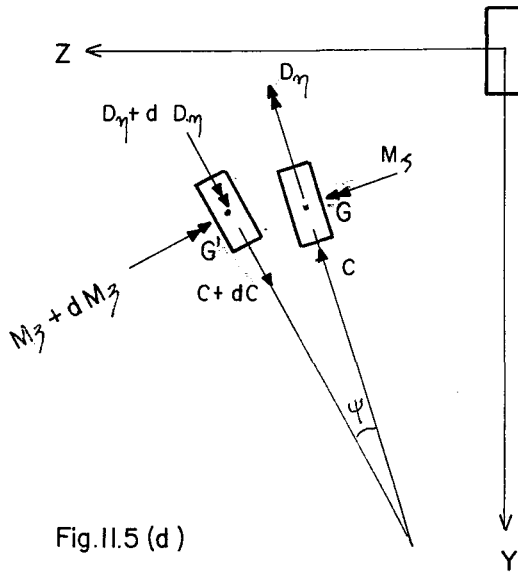


Fig.II.5 (d)

Na Fig. II.5-d, têm-se as duas seções G e G' projetadas no plano $Y-Z$, com as respectivas solicitações (momentos fletores e cortante).

Adotando-se para eixos locais ξ, η, ζ respectivos a x, y, z sobre o elemento dx , e tendo como origem o centro de gravidade G da seção S inicial do elemento dx , pode-se, com apoio na fórmula simplificada da curvatura

$$\frac{1}{\rho} = \frac{d\theta}{dx} = -\frac{M}{EI} = -\frac{d^2y}{dx^2} \quad (\text{II.2})$$

Escrever:

$$\frac{d^2 \eta}{d\xi^2} = - \frac{M_\zeta}{B_1} = \frac{d\gamma}{d\xi} \quad (\text{II.3})$$

$$\frac{d^2 \zeta}{d\xi^2} = - \frac{D_\eta}{B_2} = \frac{d\delta}{d\xi} \quad (\text{II.4})$$

que surgem em decorrência da curvatura nos dois planos. M_ζ e D_η são as componentes segundo os eixos $\xi\xi$ e $\eta\eta$ dos momentos solicitantes após o ocorrido o Kippe e logicamente B_1 e B_2 respectivamente a maior e menor rigidez da seção.

A equação de equilíbrio de momentos em relação ao eixo $\xi\xi$, para o elemento em questão é:

$$\begin{aligned} & - T_\xi + (T_\xi + dT_\xi) \cos(d\gamma) + (D_\eta + dD_\eta) \sin(d\gamma) + \\ & - (M_\zeta + dM_\zeta) \sin(d\delta) + (C + dC) \cos \psi d\zeta - (C + dC) \sin \psi d\eta \\ & + p \frac{h}{2} \psi dx = 0 \end{aligned} \quad (\text{II.5})$$

Tomemos valores unitários para cossenos dos ângulos que se apresentam e o valor do ângulo para os senos, uma vez que estes são realmente grandezas muito pequenas que decorrem de variações angulares no elemento infinitesimal dx .

Logo:

$$\begin{aligned}
 & - T_{\xi} + (T_{\xi} + d T_{\xi}) + (D_{\eta} + d D_{\eta}) d\gamma - (M_{\zeta} + d M_{\zeta}) d\delta + \\
 & + (C + dC) d\zeta - (C + dC) \psi d\eta + p \frac{h}{2} \psi dx = 0 \quad (II.6)
 \end{aligned}$$

A expressão acima é simplificada desprezando-se os termos de 2.^a ordem e também os termos em que $d\eta$ e $d\zeta$ aparecem como fatores, uma vez que sendo η e ζ muito pequenos, menores ainda são $d\eta$ e $d\zeta$, considerados de ordem superior comparados com dx .

Aplicando (II.3) e (II.4) em (II.6) e supondo-se $d\xi \approx dx$ temos:

$$\frac{dT_{\xi}}{dx} + \frac{M_{\zeta} D_{\eta}}{B_2} - \frac{M_{\zeta} D_{\eta}}{B_1} + p \frac{h}{2} \psi = 0$$

se chamarmos de $B' = \frac{B_1 B_2}{B_1 - B_2}$ teremos: (II.7)

$$\frac{dT_{\xi}}{dx} + \frac{M_{\zeta} D_{\eta}}{B'} + \frac{ph}{2} \psi = 0 \quad (II.8)$$

Pelo fato de que: $d\psi = \frac{T_{\xi}}{G J_T} dx$ (II.9)

sendo $R_T = G J_T$ (II.10)

temos:

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} + \frac{M_\zeta D_\eta}{B' R_T} + \frac{ph}{2 R_T} \psi = 0 \quad (\text{II.11})$$

que é a equação diferencial em ψ para hastes retas.

Para obter as solicitações M_ζ e D_η numa seção qualquer S considerando-se conhecidas as reações de apoio, utiliza-se algumas das equações (II.1), levando-se em conta as deformações de Kippe:

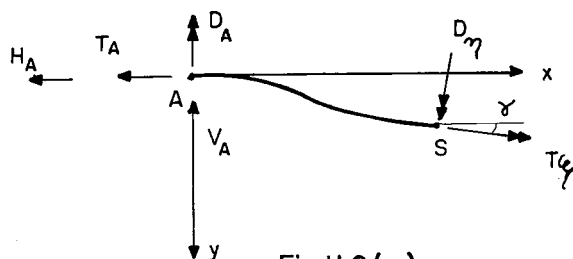


Fig.II.6(a)

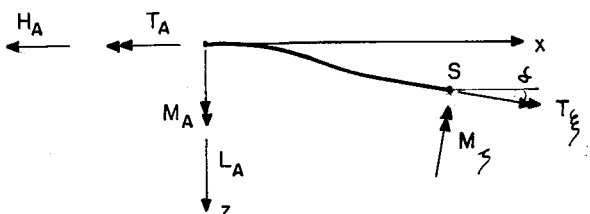


Fig.II.6(b)

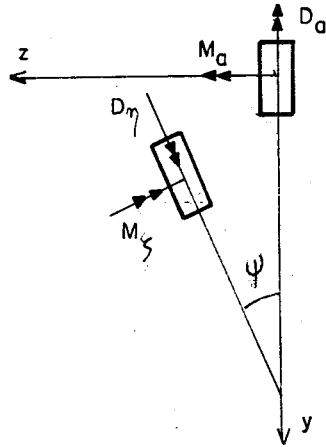


Fig.II.6(c)

$$M_{\zeta} = M_A \cos \psi - D_A \sin \psi + \Sigma M_0 \quad (*)$$

$$D_{\eta} = D_A \cos \psi + (M_A + \Sigma M_0) \sin \psi + \Sigma D_0 \quad (*)$$

Despreza-se $D_A \sin \psi$ em face de M_A então:

$$M_{\zeta} = M_A + \Sigma M_0$$

(²) (II.12)

$$D_{\eta} = D_A + M_{\zeta} \psi + \Sigma D_0$$

(²) As expressões estão determinadas na tese do Prof. Sidney Santos (pg. 67), para um caso mais geral de apoios elásticos - Vide Ref. | ¹ |

(*) Ver observação Eq. (II.1)

2.2 - EQUAÇÃO GERAL DO KIPPE PARA HASTES RETAS

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} + \frac{M_{\zeta} D_{\eta}}{B' R_T} + \frac{p h \psi}{2 R_T} = 0$$

Esta é a equação diferencial do Kippe em hastes retas na fase elástica, cujos parâmetros já foram descritos no item anterior. Ela nos permitirá calcular o valor da menor carga crítica de flambagem de qualquer peça, o que veremos nos próximos capítulos.

A expressão acima será resolvida considerando o método das diferenças finitas como se vê a seguir.

No Capítulo III em que será abordado o Kippe elástico, as rigezas à flexão (EI) e à torção ($G J_T$) são características da peça bem definidas.

No Capítulo IV em que será abordado o Kippe na fase elasto-plástica, admitiremos como hipótese básica que, no trecho plastificado, a altura da peça seja apenas aquela correspondente a região elástica.

CAPÍTULO III

RESOLUÇÃO NUMÉRICA DA EQUAÇÃO

A equação diferencial será resolvida utilizando-se o método das diferenças finitas, aplicados à haste dividida em segmentos iguais de comprimento h , como se segue:

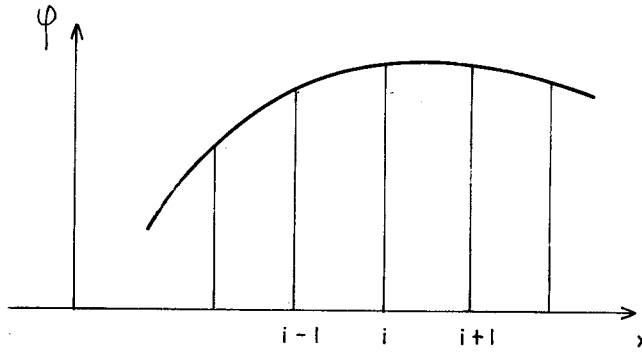


Fig. III.1

$$\left(\frac{d\psi}{dx}\right)_i = \frac{\psi_{i+1} - \psi_{i-1}}{2h}$$

$$\left(\frac{d^2\psi}{dx^2}\right)_i = \frac{\psi_{i+1} - 2\psi_i + \psi_{i-1}}{h^2}$$

Surge daí um sistema de equações homogêneas em que as incógnitas ψ_i só terão solução não trivial se e somente se o determinante dos coeficientes for nulo. É o que será mostrado nos exemplos a seguir e que permitirá calcular a carga crítica de flambagem lateral (Kippe).

3.1 - APLICAÇÕES

3.1-1 - Viga em Balanço

Passamos a tomar como exemplo uma haste em balanço, com carga concentrada na extremidade, e outra com carga vertical distribuída uniformemente ao longo da haste.

Consideremos que o carregamento atue sempre no eixo da peça.

Da Equação II.7 resulta:

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} + \frac{M_\zeta D_\eta}{B' R_T} = 0 \quad (\text{III.1})$$

Adotando extremidades como as da Fig. III.2-a.

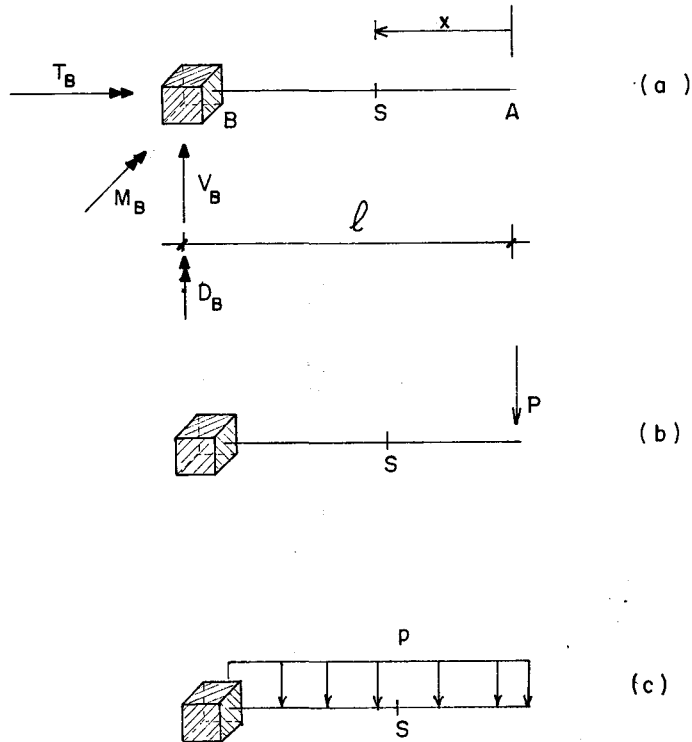


Fig.III.2

OBSERVAÇÃO:

Como o carregamento é vertical, $H_B = L_B = 0$ na extremidade A em balanço, não existem reações.

3.1.1-1 - Carga Concentrada na Extremidade do Balanço

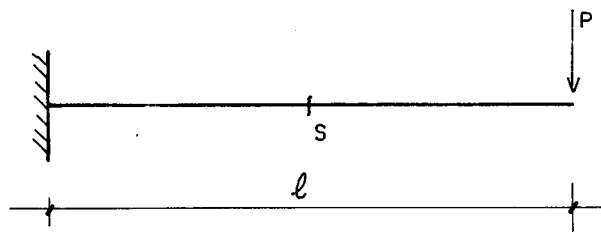


Fig.III.3

Seja M_ζ e D_η na Seção S.

Aplicando a Equação (II.12), surge:

$$M_\zeta = \Sigma M_0 = P \cdot x \quad (\text{III.2})$$

$$D_\eta = M_\zeta \psi = P \cdot x \cdot \psi \quad (\text{III.3})$$

Substituindo os valores de M_ζ e D_η na equação (III.1) e denominando $K^2 = \frac{P^2}{B' R_T}$ tem-se:

$$\frac{d^2 \psi}{dx^2} + K^2 x^2 \psi = 0 \quad (\text{III.4})$$

Seja a Fig. (III.4) a seguir:

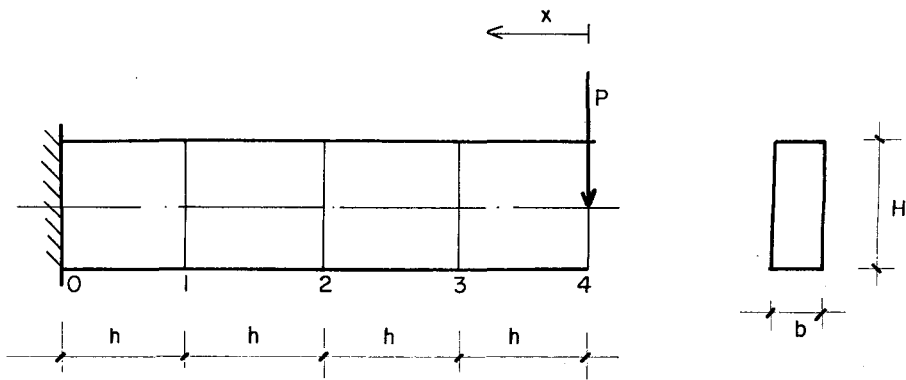


Fig. III.4

tem-se:

$$\left. \begin{aligned} \psi_1'' + K^2 x_1^2 \psi_1 &= 0 \\ \psi_2'' + K^2 x_2^2 \psi_2 &= 0 \\ \psi_3'' + K^2 x_3^2 \psi_3 &= 0 \\ \psi_4'' + K^2 x_4^2 \psi_4 &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (\text{III.5})$$

Desenvolvendo pelo método das diferenças finitas e considerando que $\psi_0 = 0$ (engaste) e que a variação angular $(\frac{d\psi}{dx})_i$ é nula para $i > 4$ na Fig. III.4, decorrendo pois que $\psi_5 = \psi_4$, tem-se:

$$\left. \begin{aligned}
 \psi''_1 &= \frac{\psi_2 - 2\psi_1 + \psi_0}{h^2} = \frac{\psi_2 - 2\psi_1}{h^2} \\
 \psi''_2 &= \frac{\psi_3 - 2\psi_2 + \psi_1}{h^2} \\
 \psi''_3 &= \frac{\psi_4 - 2\psi_3 + \psi_2}{h^2} \\
 \psi''_4 &= \frac{\psi_5 - 2\psi_4 + \psi_3}{h^2} = \frac{-\psi_4 + \psi_3}{h^2}
 \end{aligned} \right\} \quad (\text{III.6})$$

Aplicando (III.6) a (III.5); fazendo $h = \frac{\ell}{4}$

tem-se:

$$\left. \begin{aligned}
 x_1 = \frac{3\ell}{4} &\rightarrow \frac{\psi_2 - 2\psi_1}{\left(\frac{\ell}{4}\right)^2} + K^2 \left(\frac{3\ell}{4}\right)^2 \psi_1 = 0 \\
 x_2 = \frac{\ell}{2} &\rightarrow \frac{\psi_3 - 2\psi_2 + \psi_1}{\left(\frac{\ell}{4}\right)^2} + K^2 \left(\frac{\ell}{2}\right)^2 \psi_2 = 0 \\
 x_3 = \frac{\ell}{4} &\rightarrow \frac{\psi_4 - 2\psi_3 + \psi_2}{\left(\frac{\ell}{4}\right)^2} + K^2 \left(\frac{\ell}{4}\right)^2 \psi_3 = 0 \\
 x_4 = 0 &\rightarrow \frac{-\psi_4 + \psi_3}{\left(\frac{\ell}{4}\right)^2} + K^2 (0)^2 \psi_4 = 0
 \end{aligned} \right\} \quad (\text{III.7})$$

que resulta em:

$$\begin{bmatrix} \left[\frac{9}{256} K^2 \ell^4 - 2 \right] & 1 & 0 & 0 \\ 1 & \left| \frac{K^2 \ell^4}{64} - 2 \right| & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \left| \frac{K^2 \ell^4}{256} - 2 \right| & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \\ \psi_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (\text{III.8})$$

Para que os valores de ψ_i sejam determinados e diferentes de zero, o determinante da matriz M (4×4) acima deve ser nulo.

Definindo:

$$A = \left(\frac{9}{256} K^2 \ell^4 - 2 \right) \quad ; \quad B = \left(\frac{K^2 \ell^4}{64} - 2 \right) \quad ; \quad C = \left(\frac{K^2 \ell^4}{256} - 2 \right)$$

$$|M| = \begin{vmatrix} A & 1 & 0 & 0 \\ 1 & B & 1 & 0 \\ 0 & 1 & C & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = (-1) \begin{vmatrix} A & 1 & 0 \\ 1 & B & 1 \\ 0 & 1 & C \end{vmatrix} - (1) \begin{vmatrix} A & 1 & 0 \\ 1 & B & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$|M| = - (ABC - A - C) - (AB - 1) = 0$$

Resultados Intermediários:

$$AB = 5,49 \times 10^{-4} k^4 \ell^8 - 0,1016 k^2 \ell^4 + 4$$

$$ABC = 2,14 \times 10^{-6} k^6 \ell^{12} - 14,945 \times 10^{-4} k^4 \ell^8 + 0,2188 K^2 \ell^4 + 8$$

$$ABC - A - C = 2,14 \times 10^{-6} k^6 \ell^{12} - 14,945 \times 10^{-4} k^4 \ell^8 + 0,1797 k^2 \ell^4 - 4$$

$$|M| = - 2,14 \times 10^{-6} \ell^{12} k^6 + 9,454 \times 10^{-4} \ell^8 k^4 - 0,0781 \ell^4 k^2 + 1$$

A equação resultante é:

$$2,14 \times 10^{-6} \ell^{12} k^6 - 94,54 \times 10^{-5} \ell^8 k^4 + 0,0781 \ell^4 k^2 - 1 = 0 \quad (\text{III.9})$$

aplicável a qualquer haste em balanço de comprimento ℓ .

A menor raiz positiva da Eq. III.9 permite que seja calculada o valor da carga crítica através da expressão:

$$K^2 = \frac{P^2}{B' R_T} \quad (\text{III.10})$$

Tomemos como exemplo a peça, de aço da Fig. II.5, como se vê a seguir:

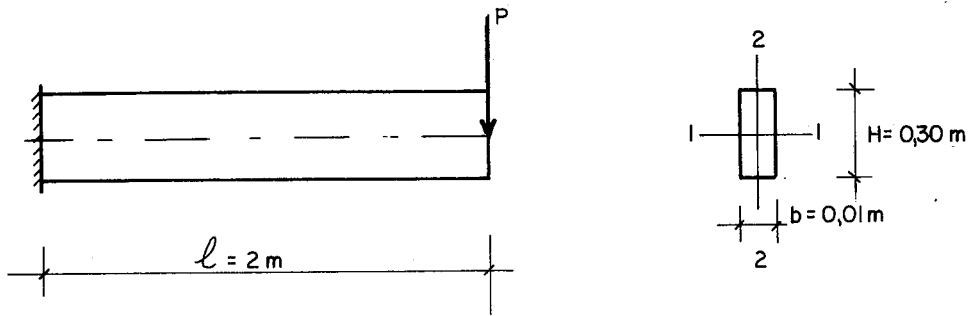


Fig. III.5

1. Fazendo $l = 2\text{m}$ na Eq.(III.9), tem-se:

$$0,0087654 K^6 - 0,2420173 K^4 + 1,2496 K^2 - 1 = 0$$

cuja menor raiz é $K = 0,99$.

$$2. K^2 = \frac{P^2}{B' R_T}$$

$$B' = \frac{B_1 B_2}{B_1 - B_2} = \frac{E b^3 H^3}{12 (H^2 - b^2)} \quad (\text{III.11})$$

$$B' = \frac{21 \times 10^6 (0,01 \times 0,3)^3}{12 \times (0,3^2 - 0,01^2)} = 0,526$$

$$3. R_T = G J_T = \frac{E}{2 (1 + \nu)} J_T = \frac{3}{8} E J_T$$

considerando para o Aço $\nu = 0,3 \therefore G \simeq 3/8 E$

sendo

$$J_T = \frac{H b^3}{16} \left[\frac{16}{3} - 3,36 \frac{b}{H} \left(1 - \frac{b^4}{12 H^4} \right) \right] (*)$$

logo:

$$R_T = \frac{3}{128} E H b^3 \left[\frac{16}{3} - 3,36 \frac{b}{H} \left(1 - \frac{b^4}{12 H^4} \right) \right] \quad (III.12)$$

Com $E = 21 \times 10^6 \frac{tf}{m^2}$, para o aço, resulta:

$$R_T = 0,771$$

Donde a carga crítica:

$$P_{cr}^{el} = K \sqrt{B' R_T} = 0,99 \sqrt{0,526 \times 0,771} = 0,63 \text{ tf}$$

Este resultado confere com o valor encontrado, no mesmo exemplo, na tese do Prof. Sidney Santos ($P_{cr} = 0,63 \text{ tf}$); onde a equação diferencial foi resolvida diferentemente através da função de Bessel, mostrando que com poucas divisões o método das diferenças finitas apresenta no problema em estudo, resulta do muito bom.

(*) Ver formulário na ref. | 7 |

Hã necessidade de verificar qual a carga máxima, que a peça suportaria a flexão.

Tomando-se como limite de escoamento $\sigma_e = 24\,000 \text{ tf/m}^2$. Sabemos que,

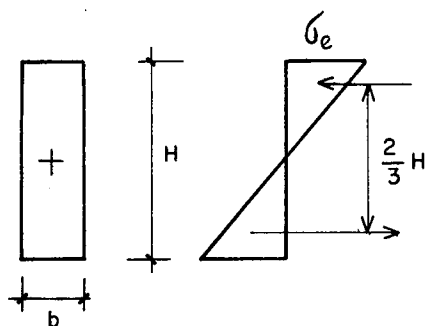


Fig.III.6

$$M_R = \frac{\sigma_e b H^2}{6} \quad (\text{III.13})$$

$$M_A = P\ell$$

A configurao de tensões da Figura III.6 representa o estado máximo de resistência da seo 0 no regime elástico, donde resulta

$$P_e = \frac{\sigma_e b H^2}{6 \ell} \quad (\text{III.14})$$

$$P_e = \frac{24000 \times 0,01 \times 0,3^2}{6 \times 2,0} = 1,8 \text{ tf}$$

Quando a haste está prestes a perder a estabilidade com $P = 0,63 \text{ tf}$, a seo mais solicitada ainda trabalha

com uma tensão muito abaixo da tensão de escoamento como se constata:

$$P = 0,63 \text{ tf}$$

$$\sigma_{\max} = \frac{0,63 \times 6 \times 2,0}{0,01 \times 0,3^2} = 8400 \text{ tf/m}^2 \ll \sigma_e$$

Em sequência apresenta-se tabelas com resultados de carga crítica, no regime elástico, para hastes em balanço com carga concentrada P aplicada na extremidade:

A tabela seguinte apresenta as equações que permitem o cálculo da constante K para alguns vãos típicos, e que serão usados adiante; baseando-se na Eq. (III.9) temos:

- QUADRO III.1 -

Vãos	E Q U A Ç Ã O	Menor raiz k positiva
1 m	$0,00000214 K^6 - 0,00094538 K^4 + 0,0781 K^2 - 1 = 0$	3,96
1,5m	$0,00027766 K^6 - 0,024229 K^4 + 0,395381 K^2 - 1 = 0$	1,76
2 m	$0,0087654 K^6 - 0,2420173 K^4 + 1,2496 K^2 - 1 = 0$	0,99
3,0m	$1,1373 K^6 - 6,2026 K^4 + 6,326 K^2 - 1 = 0$	0,44
3,5m	$7,2315 K^6 - 21,2888 K^4 + 11,7199 K^2 - 1 = 0$	0,324
4 m	$35,9033 K^6 - 61,9564 K^4 + 19,994 K^2 - 1 = 0$	0,248

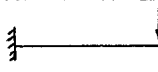
QUADRO III.2

RELAÇÃO DOS VALORES DE B' e R_T PARA
DIFERENTES SEÇÕES SEGUNDO EQS. (III.11) e (III.12)

Seção (cm x cm)	B'	R_T
0,5 x 30	0,0656	0,097
1 x 30	0,526	0,771
2 x 30	4,219	6,035
3 x 30	14,318	19,925
0,5 x 35	0,0766	0,1138
1 x 35	0,613	0,902
2 x 35	4,916	7,085
3 x 35	16,660	23,468
0,5 x 40	0,0875	0,1302
1 x 40	0,700	1,034
2 x 40	5,614	8,135
3 x 40	19,007	27,011
0,5 x 45	0,0984	0,1466
1 x 45	0,788	1,165
2 x 45	6,312	9,185
3 x 45	21,357	30,555

A tabela abaixo nos fornece o valor da carga crítica de flambagem lateral na fase elástica, considerando seções transversais diversas para diferentes comprimentos de haste.

QUADRO III.3

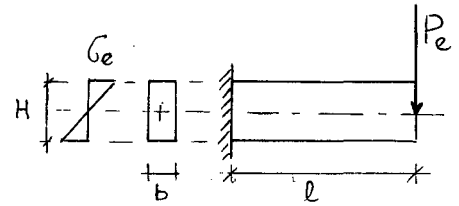
		Valores de $p_{cr}^{el} = K \sqrt{B' R_T}$					
Seção (cm.x cm)	$\sqrt{B' R_T}$	$\ell=1,0$	$\ell=1,5$	$\ell=2,0$	$\ell=3,0$	$\ell=3,5$	$\ell=4,0$
		k=3,96	k=1,76	k=0,99	k=0,44	k=0,324	k=0,284
0,5 x 30	0,080	0,32	0,14	0,08	0,04	0,03	0,02
1 x 30	0,637	2,52	1,12	0,63	0,28	0,21	0,18
2 x 30	5,046	19,98**	8,88**	5,00*	2,22	1,63	1,43
3 x 30	16,890	66,89**	29,73**	16,72**	7,43*	5,47**	4,80**
0,5 x 35	0,093	0,37	0,16	0,09	0,041	0,03	0,026
1 x 35	0,744	2,94	1,31	0,74	0,33	0,24	0,21
2 x 35	5,902	23,37**	10,39**	5,84*	2,60	1,91	1,68
3 x 35	19,773	78,30**	34,80**	19,58**	8,70**	16,41**	5,62**
0,5 x 40	0,107	0,42	0,19	0,11	0,047	0,04	0,03
1 x 40	0,851	3,37	1,5	0,84	0,37	0,28	0,24
2 x 40	6,758	26,76**	11,89*	6,69*	2,97	2,19	1,92
3 x 40	22,658	89,73**	39,88**	22,43**	9,97**	7,34*	6,44*
0,5 x 45	0,120	0,48	0,21	0,12	0,053	0,04	0,03
1 x 45	0,958	3,79	1,69	0,95	0,42	0,31	0,27
2 x 45	7,614	30,15**	13,4*	7,54	3,35	2,46	2,16
3 x 45	25,545	101,2**	44,96**	25,29**	11,24*	8,28*	7,25*

* Valores entre P_e e P_{et}

** Valores acima de P_{et}

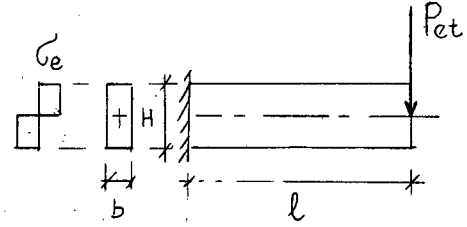
Os valores no quadro abaixo fornecem a carga máxima em que a seção de engaste começa a plastificar.

QUADRO III.4



Valores de $P_e = (\sigma_e H^2 b) / 6l$ (Eq. III.14)						
Seção (cm x cm)	$l = 1 \text{ m}$	$l = 1,5 \text{ m}$	$l = 2,0 \text{ m}$	$l = 3,0 \text{ m}$	$l = 3,5 \text{ m}$	$l = 4,0 \text{ m}$
0,5 x 30	1,8	1,2	0,9	0,6	0,51	0,45
1 x 30	3,6	2,4	1,8	1,2	1,03	0,9
2 x 30	7,2	4,8	3,6	2,4	2,06	1,8
3 x 30	10,8	7,2	5,4	3,6	3,09	2,7
0,5 x 35	2,45	1,63	1,23	0,82	0,7	0,61
1 x 35	4,9	3,27	2,45	1,63	1,40	1,23
2 x 35	9,8	6,53	4,9	3,27	2,80	2,45
3 x 35	14,7	9,8	7,35	4,9	4,20	3,68
0,5 x 40	3,2	2,13	1,6	1,07	0,91	0,8
1 x 40	6,4	4,27	3,20	2,13	1,83	1,6
2 x 40	12,8	8,53	6,40	4,27	3,66	3,20
3 x 40	19,2	12,8	9,6	6,4	5,49	4,8
0,5 x 45	4,05	2,7	2,03	1,35	1,16	1,01
1 x 45	8,10	5,4	4,05	2,7	2,31	2,03
2 x 45	16,2	10,8	8,10	5,4	4,63	4,05
3 x 45	24,3	16,2	12,15	8,1	6,94	6,08

O quadro abaixo fornece valores de carga P_{et} , que plastificam totalmente a seção do engaste.



QUADRO III.5

	Valores de $P_{et} = (\sigma_e H^2 b/4\ell) = 1,5 P_e$					
Seção (cm x cm)	$\ell = 1\text{ m}$	$\ell = 1,5\text{ m}$	$\ell = 2,0\text{ m}$	$\ell = 3,0\text{ m}$	$\ell = 3,5\text{ m}$	$\ell = 4,0\text{ m}$
0,5 x 30	2,7	1,8	1,35	0,9	0,77	0,68
1 x 30	5,4	3,6	2,7	1,8	1,55	1,35
2 x 30	10,8	7,2	5,4	3,6	3,09	2,70
3 x 30	16,2	10,8	8,1	5,4	4,64	4,05
0,5 x 35	3,68	2,45	1,84	1,23	1,05	0,92
1 x 35	7,35	4,9	3,68	2,45	2,1	1,85
2 x 35	14,7	9,8	7,35	4,91	4,2	3,68
3 x 35	22,1	14,7	11,03	7,35	6,3	5,52
0,5 x 40	4,8	3,2	2,4	1,6	1,37	1,20
1 x 40	9,6	6,41	4,8	3,2	2,75	2,40
2 x 40	19,2	12,8	9,6	6,41	5,49	4,8
3 x 40	28,8	19,2	14,4	9,6	8,24	7,2
0,5 x 45	6,08	4,05	3,04	2,03	1,74	1,52
1 x 45	12,2	8,1	6,08	4,05	3,47	3,05
2 x 45	24,3	16,2	12,15	8,1	6,95	6,08
3 x 45	36,45	24,3	18,2	12,2	10,41	9,12

3.1-1.2 - Carga Uniformemente Distribuida ao Longo do Eixo da Haste em Balanço

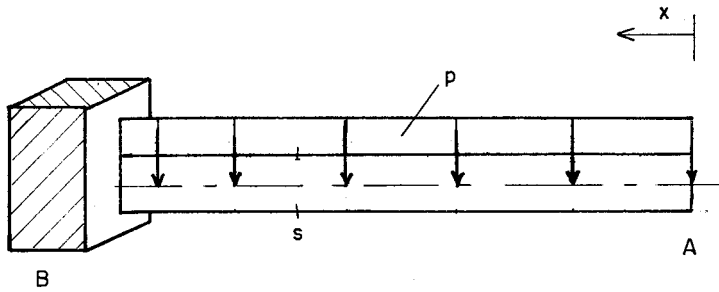


Fig.III.7

Seja M_ζ e D_η na seção S segundo Eq. (II.8):

$$M_\zeta = p \frac{x^2}{2}$$

(III.15)

$$D_\eta = p \frac{x^2}{2} \psi$$

Substituindo (III.15) em (III.1), obtemos:

$$\frac{d^2 \psi}{dx^2} + \frac{p^2 x^4}{4 B' R_T} \psi = 0 \quad (III.16)$$

$$\text{denominando } K^2 = \frac{p^2}{4 B' R_T} \quad (III.17)$$

Resulta:

$$\frac{d^2 \psi}{dx^2} + K^2 x^4 \psi = 0 \quad (\text{III.18})$$

Conforme a figura (III.8) a seguir:

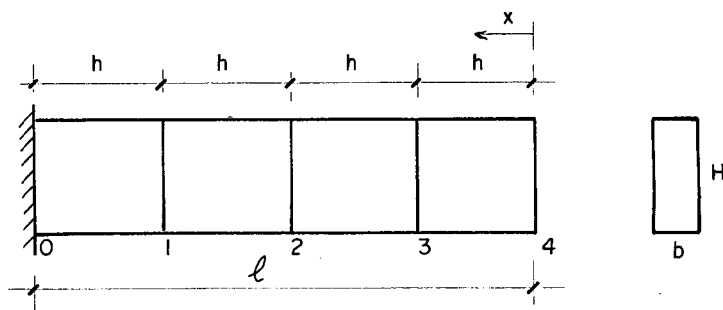


Fig. III.8

$$\left. \begin{aligned} \psi_1'' + K^2 x_1^4 \psi_1 &= 0 \\ \psi_2'' + K^2 x_2^4 \psi_2 &= 0 \\ \psi_3'' + K^2 x_3^4 \psi_3 &= 0 \\ \psi_4'' + K^2 x_4^4 \psi_4 &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (\text{III.19})$$

Desenvolve-se cada equação pelo método das diferenças finitas. As mesmas condições de bordo; anteriormente definidas na Eq. III.6), são consideradas. Substituindo (III.6) em (III.19) e multiplicando por h^2 .

$$\begin{aligned}
 x_1 = \frac{3}{4} \ell &\rightarrow \left(\psi_2 - 2 \psi_1 \right) + K^2 \left(\frac{\ell}{4} \right)^2 \left(\frac{3}{4} \ell \right)^4 \psi_1 = 0 \\
 x_2 = \frac{\ell}{2} &\rightarrow \left(\psi_3 - 2 \psi_2 + \psi_1 \right) + K^2 \left(\frac{\ell}{4} \right)^2 \left(\frac{\ell}{2} \right)^4 \psi_2 = 0 \\
 x_3 = \frac{\ell}{4} &\rightarrow \left(\psi_4 - 2 \psi_3 + \psi_2 \right) + K^2 \left(\frac{\ell}{4} \right)^2 \left(\frac{\ell}{4} \right)^4 \psi_3 = 0 \\
 x_4 = 0 &\rightarrow \left(-\psi_4 + \psi_3 \right) + K^2 \left(\frac{\ell}{4} \right)^2 (0)^4 \psi_4 = 0
 \end{aligned} \tag{III.20}$$

ou

$$\begin{bmatrix} \left[\frac{81}{4096} K^2 \ell^6 - 2 \right] & 1 & 0 & 0 \\ 1 & \left[\frac{K^2 \ell^6}{256} - 2 \right] & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \left[\frac{K^2 \ell^6}{4096} - 2 \right] & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \\ \psi_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{III.21}$$

Definindo:

$$A = \left(\frac{81}{4096} K^2 \ell^6 - 2 \right) ; \quad B = \left(\frac{K^2 \ell^6}{256} - 2 \right) ; \quad C = \left(\frac{K^2 \ell^6}{4096} - 2 \right)$$

tem-se que o determinante da matriz

$$M = \begin{bmatrix} A & 1 & 0 & 0 \\ 1 & B & 1 & 0 \\ 0 & 1 & C & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

deve ser nulo.

$$|M| = -(A B C - A - C) - (A B - 1) = 0$$

Resultados intermediários:

$$AB = 7,725 \times 10^{-5} K^4 \ell^{12} - 47,364 \times 10^{-3} K^2 \ell^6 + 4$$

$$ABC = 1,89 \times 10^{-8} K^6 \ell^{18} - 16,606 \times 10^{-5} K^4 \ell^{12} + 95,704 \times 10^{-3} K^2 \ell^6 - 8$$

$$(ABC - A - C) = 1,89 \times 10^{-8} K^6 \ell^{18} - 16,606 \times 10^{-5} K^4 \ell^{12} + 75,684 \times 10^{-3} K^2 \ell^6 - 4$$

$$|M| = -1,889 \times 10^{-8} K^6 \ell^{18} + 8,88 \times 10^{-5} K^4 \ell^{12} - 28,324 \times 10^{-3} K^2 \ell^6 + 1 = 0$$

A equação resultante será:

$$1,889 \times 10^{-8} \ell^{18} K^6 - 8,88 \times 10^{-5} \ell^{12} K^4 + 28,324 \times 10^{-3} \ell^6 K^2 - 1 = 0 \quad (\text{III.22})$$

aplicável a qualquer haste em balanço, de comprimento ℓ , estando sujeita a carregamento distribuído uniforme, em regime elástico.

A menor raiz K positiva da equação (III.22) permite calcular o valor da menor carga crítica, sendo para isto utilizada a expressão (III.17).

Seja o exemplo da Figura III.4.

1. Faz-se $\ell = 2\text{m}$ em (III.22), tem-se:

$$0,0047186 K^6 - 0,363725 K^4 + 1,81274 K^2 - 1 = 0$$

cujas menores raízes são $K = 0,795$.

$$2. \quad K^2 = \frac{p^2}{4 B' R_T}$$

$$\text{donde } p_{cr}^{el} = 2K \sqrt{B' R_T} \quad (\text{III.23})$$

para $b = 0,01\text{m}$; $H = 0,3\text{ m}$ tem-se:

$$B' = 0,526$$

$$R_T = 0,771$$

daí:

$$p_{cr} = 2 \times 0,795 \sqrt{0,526 \times 0,771} = 1,013 \text{ tf/m}$$

O valor encontrado para a carga crítica difere em apenas 3,5% do valor ($P_{cr} = 1,05$) calculado pelo Prof. Sidney Santos em sua tese, com solução compacta, mostrando-se aqui também a boa aproximação das diferenças finitas.

Para se ter um melhor resultado neste método, a haste deveria ter sido resolvida para maior número de seções. Para fins práticos porém, o valor acima é suficiente.

Vamos comparar o resultado encontrado com a carga p_e , máxima que em regime elástico a haste suporta:

$$M_A = \frac{p \ell^2}{2} \rightarrow \text{é o momento atuante na seção do engaste;}$$

$$M_R = \frac{\sigma_e b H^2}{6} \rightarrow \text{é o momento resistente conforme Fig. (III.6);}$$

assim,

$$p_e = \frac{\sigma_e b H^2}{3 \ell^2} \quad (\text{III.24})$$

$$p_e = \frac{24000 \times 0,01 \times 0,3^2}{3 \times 2,0^2} = 1,8 \text{ tf.}$$

Constata-se também neste exemplo que a haste perderia a estabilidade ($P_{cr} = 1,013 \text{ tf}$) antes mesmo de ser alcançada a tensão de escoamento. Porém, como se vê a seguir, está bem mais próxima de σ_e do que no caso anterior.

$$p = 1,013 \text{ tf}$$

$$\sigma_{\max} = \frac{3 \times 1,013 \times 2,0^2}{0,01 \times 0,3^2} = 13.507 \frac{\text{tf}}{\text{m}^2} < \sigma_e$$

Em sequência apresentam-se tabelas com resultados de cargas crítica, no regime elástico, para hastes em balanço com carregamento uniforme.

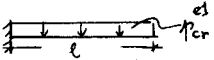
O quadro abaixo relaciona as equações que permitem o cálculo da constante K , para diversos vão.

QUADRO III.6

Vão	E Q U A Ç Ã O (III.21)	Menor Raiz K
1 m	$0,0000000189 K^6 - 0,0000888 K^4 + 0,028324 K^2 - 1 = 0$	6,36
1,5 m	$0,0000279 K^6 - 0,011521 K^4 + 0,322628 K^2 - 1 = 0$	1,89
2 m	$0,0047186 K^6 - 0,3637248 K^4 + 1,812736 K^2 - 1 = 0$	0,795
3,0 m	$7,3222 K^6 - 47,192 K^4 + 20,648 K^2 - 1 = 0$	0,642
3,5 m	$117,152 K^6 - 300,11 K^4 + 52,06 K^2 - 1 = 0$	0,404
4 m	$1298,798 K^6 - 1490 K^4 + 116 K^2 - 1 = 0$	0,271

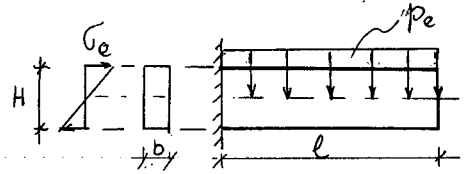
O quadro abaixo fornece valores de carga crítica de flambagem lateral na fase elástica, considerando várias dimensões de seção transversal e alguns valores de ℓ .

QUADRO III.7

		VALORES DE $p_{cr}^{el} = 2K \sqrt{B' R_T}$					
Seção (cm x cm)	$(2 \sqrt{B' R_T})$	$\ell=1,0$	$\ell=1,5$	$\ell=2,0$	$\ell=3,0$	$\ell=3,5$	$\ell=4,0$
		$K=6,36$	$K=1,89$	$K=0,795$	$K=0,642$	$K=0,404$	$K=0,271$
0,5 x 30	0,1595	1,02	0,30	0,127	0,10	0,06	0,04
1 x 30	1,2736	8,10*	2,41*	1,01*	0,82*	0,52	0,35
2 x 30	10,0919	64,18**	19,07**	8,02**	6,48**	4,08**	2,74**
3 x 30	33,781	214,85**	63,85**	26,86**	21,69**	13,65**	9,2**
0,5 x 35	0,1867	1,19	0,35	0,15	0,12	0,08	0,05
1 x 35	1,4873	9,46	2,81	1,18	0,95	0,60	0,40
2 x 35	11,8034	75,07**	22,31**	9,38**	7,58**	4,77**	3,20**
3 x 35	39,5459	251,5**	74,74**	31,44**	25,39**	15,98**	10,72**
0,5 x 40	0,2135	1,358	0,40	0,17	0,18	0,09	0,06
1 x 40	1,7011	10,82	3,22	1,35	1,09	0,69	0,46
2 x 40	13,5162	85,96**	25,55**	10,75**	8,68**	5,46**	3,66**
3 x 40	45,3166	288,21**	85,65**	36,03**	29,09**	18,31**	12,28**
0,5 x 45	0,2402	1,53	0,45	0,19	0,15	0,10	0,07
1 x 45	1,9160	12,19	3,62	1,52	1,23	0,77	0,52
2 x 45	15,2287	96,85**	28,78**	12,11*	9,78**	6,15**	4,13**
3 x 45	51,0902	324,93**	96,56**	40,62**	32,8**	20,64**	13,85**

Os valores no quadro abaixo fornecem a carga máxima p_e em que a seção de engaste começa a plastificar.

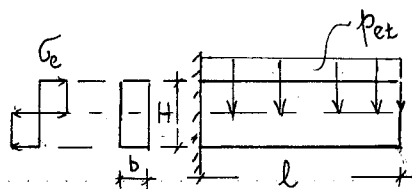
QUADRO III.8



	Valores de $p_e = (\sigma_e H^2 b) / 3 l^2$ (Eq. III.23)					
Seção (cm x cm)	$l = 1\text{ m}$	$l = 1,5\text{ m}$	$l = 2,0\text{ m}$	$l = 3,0\text{ m}$	$l = 3,5\text{ m}$	$l = 4,0\text{ m}$
0,5 x 30	3,6	1,6	0,9	0,4	0,29	0,23
1 x 30	7,2	3,2	1,8	0,8	0,59	0,45
2 x 30	14,4	6,4	3,6	1,6	1,18	0,90
3 x 30	21,6	9,6	5,4	2,4	1,76	1,35
0,5 x 35	4,9	2,18	1,23	0,54	0,40	0,31
1 x 35	9,8	4,36	2,45	1,09	0,80	0,61
2 x 35	19,6	8,71	4,9	2,18	1,60	1,23
3 x 35	29,4	13,07	7,35	3,27	2,40	1,84
0,5 x 40	6,4	2,84	1,6	0,71	0,52	0,40
1 x 40	12,8	5,69	3,2	1,42	1,04	0,80
2 x 40	25,6	11,38	6,4	2,84	2,09	1,6
3 x 40	38,4	17,07	9,6	4,27	3,13	2,4
0,5 x 45	8,10	3,6	2,03	0,9	0,66	0,51
1 x 45	16,2	7,2	4,05	1,8	1,32	1,01
2 x 45	32,4	14,4	8,10	3,6	2,64	2,03
3 x 45	48,6	21,6	12,15	5,4	3,97	3,04

Os valores no quadro abaixo, fornecem valores de carga p_{et} , que plastificam totalmente a seção de engaste.

QUADRO III.9



Seção (cm x cm)	Valores de $p_{et} = (\sigma_e H^2 b) / 2l^2 = 1,5 P_e$					
	$l = 1m$	$l = 1,5m$	$l = 2,0m$	$l = 3,0m$	$l = 3,5m$	$l = 4,0m$
0,5 x 30	5,4	2,4	1,35	0,6	0,44	0,35
1 x 30	10,8	4,8	2,7	1,2	0,89	0,68
2 x 30	21,6	9,6	5,4	2,4	1,77	1,35
3 x 30	32,4	14,4	8,1	3,6	2,64	2,03
0,5 x 35	7,35	3,27	1,85	0,81	0,6	0,47
1 x 35	14,7	6,53	3,68	1,63	1,20	0,92
2 x 35	29,4	13,07	7,35	3,27	2,4	1,85
3 x 35	44,1	19,6	11,03	4,90	3,6	2,76
0,5 x 40	9,6	4,26	2,40	1,07	0,78	0,60
1 x 40	19,2	8,53	4,8	2,13	1,56	1,20
2 x 40	38,4	17,07	9,6	4,27	3,14	2,4
3 x 40	57,6	25,6	14,4	6,4	4,70	3,6
0,5 x 45	12,15	5,4	3,05	1,35	0,99	0,77
1 x 45	24,3	10,8	6,08	2,7	1,98	1,52
2 x 45	48,6	21,6	12,15	5,4	3,96	3,05
3 x 45	72,9	32,4	18,23	8,10	5,96	4,56

3.1-2 - Estudo da Haste Simplesmente Apoiada com Engastes a Torção

Seja a Fig.(III.9) com extremidades A e B como indicado:

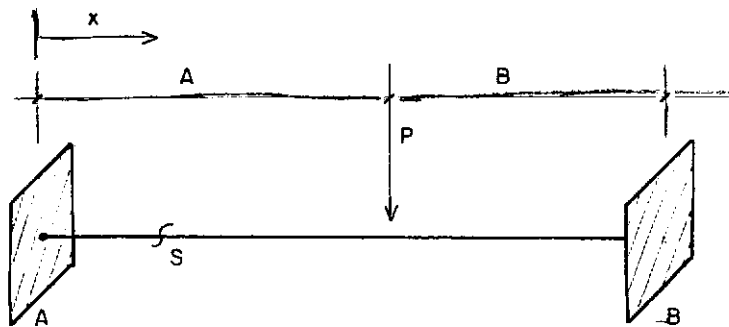


Fig.III.9

Neste caso $M_A = M_B = D_A = D_B = 0$

$$D_\eta = D_A + M_\zeta \psi \quad \therefore \quad D_\eta = M_\zeta \psi \quad (\text{Vide Eq.II.12})$$

Substituindo na Equação (II.8):

$$\frac{d^2 \psi}{dx^2} + \frac{M_\zeta^2 \psi}{B' R_T} + \frac{ph}{2 R_T} \psi = 0 \quad (\text{III.25})$$

Para maior simplificação, vamos supor que o carregamento atue diretamente no eixo da peça; de (III.25) temos:

$$\frac{d^2 \psi}{dx^2} + \frac{M_{\zeta}^2 \psi}{B' R_T} = 0 \quad (\text{III.26})$$

Vamos estudar somente o caso em que a peça está sujeita a uma carga P vertical e pontual atuando no eixo conforme a Fig. III.9.

O valor de M_{ζ} em qualquer seção é dada pelas expressões:

$$\left. \begin{aligned} M_{\zeta} &= \frac{P}{\ell} AB \frac{x}{A} & 0 < x < A \\ \text{ou} \\ M_{\zeta} &= \frac{P}{\ell} AB \frac{x'}{B} & A < x < \ell \\ & & \text{sendo } x' = (\ell - x) \end{aligned} \right\} \quad (\text{III.27})$$

Teremos duas equações diferenciais semelhantes ao substituir a Eq. (III.27) em (III.26):

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{d^2 \psi}{dx^2} + \frac{\left(\frac{PAB}{\ell}\right)^2}{A^2 B' R_T} \frac{x^2}{\psi} &= 0 \\ \frac{d^2 \psi}{dx^2} + \frac{\left(\frac{PAB}{\ell}\right)^2}{B^2 B' R_T} \frac{x'^2}{\psi} &= 0 \end{aligned} \right.$$

Substituindo $M_p = \frac{PAB}{\ell}$, resulta:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d^2 \psi}{dx^2} + \frac{M_P^2}{A^2 B' R_T} x^2 \psi = 0 \\ \frac{d^2 \psi}{dx^2} + \frac{M_P^2}{B^2 B' R_T} x'^2 \psi = 0 \end{array} \right. \quad (\text{III.28})$$

tomando-se

$$K_1^2 = \frac{M_P^2}{A^2 B' R_T}$$

e

$$K_2^2 = \frac{M_P^2}{B^2 B' R_T}$$

resultando, das equações uma única, de forma geral:

$$\frac{d^2 \psi}{dx^2} + K^2 x^2 \psi = 0 \quad (\text{III.29})$$

3.1-2.1 - Carga Concentrada no Meio do Vão

Será estudada somente o caso da viga com carga P puntual atuando no meio do vão conforme Fig. III.10.

Neste caso em que $A = B$, M_p assume o valor de $P\ell/4$, decorrendo então $K_1 = K_2$ o que torna idêntica as Equações (III.28), resultando ambas em (III.29). Teremos, portanto, resultados de rotações iguais para posições simétricas na haste.

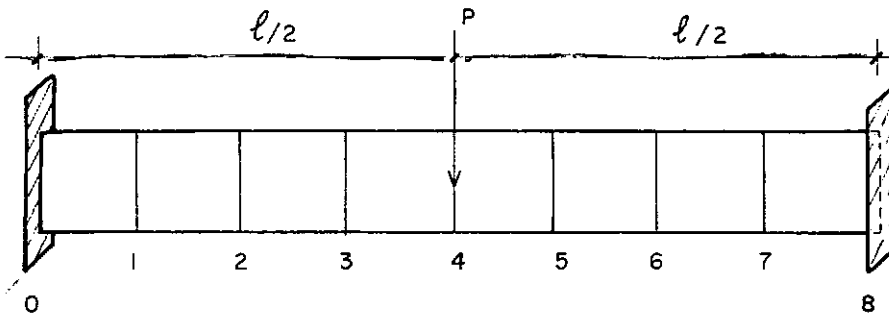


Fig.III.10

Aplicando (III.29), à Fig. III.10, considerando

$$K = \frac{P^2}{4 B' R_T} \quad (\text{III.30})$$

tem-se, para cada ponto:

$$\left\{ \begin{array}{l} \psi_1'' + K^2 x_1^2 \psi_1 = 0 \\ \psi_2'' + K^2 x_2^2 \psi_2 = 0 \\ \psi_3'' + K^2 x_3^2 \psi_3 = 0 \\ \psi_4'' + K^2 x_4^2 \psi_4 = 0 \end{array} \right. \quad (\text{III.31})$$

Condições:

$$\psi_0 = \psi_{10} = 0 \quad (\text{engaste}) \quad (\text{III.32})$$

$$\psi_5 = \psi_3 \quad (\text{simetria})$$

Aplicando o método das Diferenças Finitas e utilizando a Eq. (III.32) tem-se:

$$\left\{ \begin{array}{l} \psi_1'' = \frac{\psi_2 - 2\psi_1 + \psi_0}{h^2} = \frac{\psi_2 - 2\psi_1}{h^2} \\ \psi_2'' = \frac{\psi_3 - 2\psi_2 + \psi_1}{h^2} \\ \psi_3'' = \frac{\psi_4 - 2\psi_3 + \psi_2}{h^2} \\ \psi_4'' = \frac{\psi_5 - 2\psi_4 + \psi_3}{h^2} = \frac{2\psi_3 - 2\psi_4}{h^2} \end{array} \right. \quad (\text{III.33})$$

Substituindo a Eq. (III.33) em (III.31); sendo $h = \frac{\ell}{8}$ tem-se:

$$\begin{aligned}
 x_1 = \frac{\ell}{8} & \rightarrow \left\{ \begin{aligned} & \frac{(\psi_2 - 2\psi_1)}{\left(\frac{\ell}{8}\right)^2} + K^2 \left(\frac{\ell}{8}\right)^2 \psi_1 = 0 \\ & \frac{(\psi_3 - 2\psi_2 + \psi_1)}{\left(\frac{\ell}{8}\right)^2} + K^2 \left(\frac{2\ell}{8}\right)^2 \psi_2 = 0 \\ & \frac{(\psi_4 - 2\psi_3 + \psi_2)}{\left(\frac{\ell}{8}\right)^2} + K^2 \left(\frac{3\ell}{8}\right)^2 \psi_3 = 0 \\ & \frac{(2\psi_3 - 2\psi_4)}{\left(\frac{\ell}{8}\right)^2} + K^2 \left(\frac{4\ell}{8}\right)^2 \psi_4 = 0 \end{aligned} \right. \quad (III.34)
 \end{aligned}$$

Simplificando:

$$\left\{ \begin{aligned} & \left(K^2 \frac{\ell^4}{8^4} - 2\right) \psi_1 + \psi_2 = 0 \\ & \psi_1 + \left(K^2 \frac{4\ell^4}{8^4} - 2\right) \psi_2 + \psi_3 = 0 \\ & \psi_2 + \left(K^2 \frac{9\ell^4}{8^4} - 2\right) \psi_3 + \psi_4 = 0 \\ & \psi_3 + \left(K^2 \frac{8\ell^4}{8^4} - 1\right) \psi_4 = 0 \end{aligned} \right. \quad (III.35)$$

que resulta em:

$$\begin{bmatrix} \left[K^2 \frac{\ell^4}{8^4} - 2 \right] & 1 & 0 & 0 \\ 1 & \left[K^2 \frac{4 \ell^4}{8^4} - 2 \right] & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \left[K^2 \frac{9 \ell^4}{8^4} - 2 \right] & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \left[K^2 \frac{8 \ell^4}{8^4} - 1 \right] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \\ \psi_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (\text{III.36})$$

Definindo:

$$A = \left(K^2 \frac{\ell^4}{8^4} - 2 \right) \quad ; \quad B = \left(K^2 \frac{4 \ell^4}{8^4} - 2 \right)$$

$$C = \left(K^2 \frac{9 \ell^4}{8^4} - 2 \right) \quad ; \quad D = \left(K^2 \frac{8 \ell^4}{8^4} - 1 \right)$$

tem-se que na matriz abaixo, o seu determinante deve ser nulo.

$$M = \begin{bmatrix} A & 1 & 0 & 0 \\ 1 & B & 1 & 0 \\ 0 & 1 & C & 1 \\ 0 & 0 & 1 & D \end{bmatrix}$$

$$|M| = D \begin{vmatrix} A & 1 & 0 \\ 1 & B & 1 \\ 0 & 1 & C \end{vmatrix} - 1 \begin{vmatrix} A & 1 & 0 \\ 1 & B & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$|M| = D (A B C - A - C) - (AB - 1) = 0$$

Como resultados intermediários temos:

$$AB = \frac{4}{8^8} K^4 \ell^8 - \frac{10}{8^4} K^2 \ell^4 + 4$$

$$ABC = \frac{36}{8^{12}} K^6 \ell^{12} - \frac{98}{8^8} K^4 \ell^8 + \frac{56}{8^4} K^2 \ell^4 - 8$$

$$(ABC - A - C) = T = \frac{36}{8^{12}} K^6 \ell^{12} - \frac{98}{8^8} K^4 \ell^8 + \frac{46}{8^4} K^2 \ell^4 - 4$$

$$D \times T = \frac{288}{8^{16}} K^8 \ell^{16} - \frac{820}{8^{12}} K^6 \ell^{12} + \frac{466}{8^8} K^4 \ell^8 - \frac{78}{8^4} K^2 \ell^4 + 4$$

E a equação resultante é:

$$|M| = \frac{288}{8^{16}} \ell^{16} K^8 - \frac{820}{8^{12}} \ell^{12} K^6 + \frac{462}{8^8} \ell^8 K^4 - \frac{68}{8^4} \ell^4 K^2 + 1 = 0$$

(III.37)

Considere o exemplo da Figura III.11.

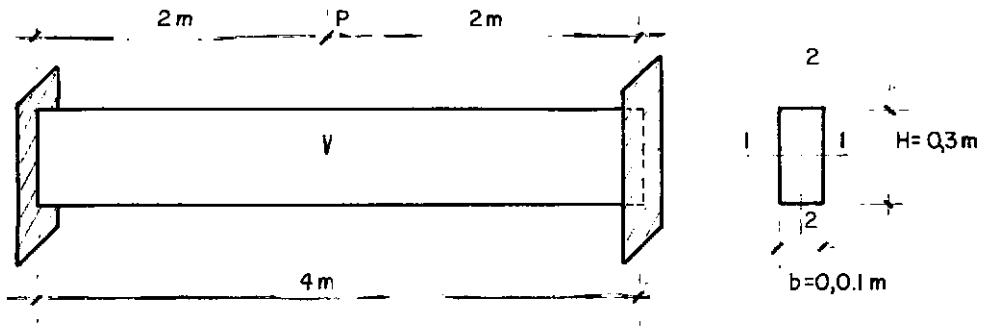


Fig. III.11

1) Tomando $\ell = 4\text{m}$ na Eq. (III.37):

$$4.394 \times 10^{-3} K^8 - 0,2002 K^6 + 1,8047 K^4 - 4,25 K^2 + 1 = 0$$

cujas menores raízes positivas são $K = 0,519$

$$2) \quad K^2 = \frac{P^2}{4 B' R_T} \quad \therefore \quad P = 2 K \sqrt{B' R_T}$$

$$B' = 0,526$$

$$R_T = 0,771$$

$$P_{cr}^{el} = 2 \times 0,519 \sqrt{0,526 \times 0,771} = 0,67 \text{ tf}$$

Este valor coincide, mais uma vez, com o encontrado na tese já citada e que vem confirmar a precisão para o método aqui usado neste exemplo.

A carga máxima que a seção central da haste suporta antes de começar a escoar-se; isto é, em que se apresenta em regime elástico é determinado a seguir:

sendo:

$$M_{\max} = \frac{P\ell}{4}$$

Igualando à Eq. (III.13), de acordo com a Fig. III.6 teremos:

$$P_e = \frac{2}{3} \frac{\sigma_e b H^2}{\ell} \quad (\text{III.38})$$

Substituindo valores:

$$P_e = \frac{2}{3} \times \frac{24000 \times 0,01 \times 0,3^2}{4,0} = 3,6 \text{ tf}$$

E a tensão máxima atuante nesta mesma seção para $P_{cr}^{el} = 0,67 \text{ tf}$ na Eq. (III.38); obtém-se:

$$\sigma_{\max} = \frac{3 \times 0,67 \times 4,0}{2 \times 0,01 \times 0,3^2} = 4467 \text{ tf/m}^2 < \sigma_e$$

A seção média da haste apresenta pequena solicitação à flexão embora com $P = 0,67 \text{ tf}$ já esteja em instabilidade elástica.

A seguir estão tabelados valores de carga crítica de Kippe, no regime elástico para hastes bi-apoiadas e engastadas à torsão com carga vertical aplicado no centro do vão:

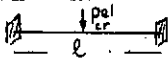
O quadro abaixo apresenta as equações usadas para cálculo de K para diversos vãos:

QUADRO III.10

Vão	E Q U A Ç Ã O III.37	Menor raiz K
1,0	$1,0232 \times 10^{-2} K^8 - 1,1933 \times 10^{-8} K^6 + 2,7537 \times 10^{-5} K^4 +$ $- 1,66 \times 10^{-2} K^2 + 1 = 0$	8,2
1,5	$6,7207 \times 10^{-10} K^8 - 1,5482 \times 10^{-6} K^6 + 7,0573 \times 10^{-4} K^4 +$ $- 0,084 K^2 + 1 = 0$	3,65
2,0	$6,7055 \times 10^{-8} K^8 - 4,8876 \times 10^{-5} K^6 + 7,0496 \times 10^{-3} K^4 +$ $- 0,2656 K^2 + 1 = 0$	2,05
3,0	$4,4045 \times 10^{-5} K^8 - 6,3415 \times 10^{-3} K^6 + 0,1807 K^4 +$ $- 1,3447 K^2 + 1 = 0$	0,91
3,5	$5,1885 \times 10^{-4} K^8 - 0,0403 K^6 + 0,6201 K^4 +$ $- 2,4913 K^2 + 1 = 0$	0,67
4,0	$4,394 \times 10^{-3} K^8 - 0,2002 K^6 + 1,8047 K^4 - 4,25 K^2 + 1 = 0$	0,519

O quadro abaixo fornece valores de carga crítica de flambagem transversal, considerando várias dimensões da seção transversal e alguns valores de ℓ .

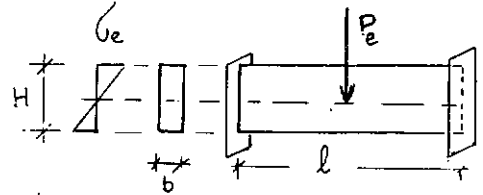
QUADRO III.11

		Valores de $\frac{P_{cr}}{B' R_T} = K \sqrt{B' R_T}$					
Seção (cm x cm)	$(2 \sqrt{B' R_T})$	$\ell=1,0$	$\ell=1,5$	$\ell=2,0$	$\ell=3,0$	$\ell=3,5$	$\ell=4,0$
		$K=8,2^*$	$K=3,65$	$K=2,05$	$K=0,91$	$K=0,67$	$K=0,519$
0,5 x 30	0,160	1,31	0,58	0,33	0,15	0,11	0,083
1 x 30	1,274	10,44	4,65	2,61	1,16	0,85	0,66
2 x 30	10,092	82,75**	36,84**	20,69*	9,18	6,76	5,24
3 x 30	33,781	277,0**	123,3**	69,25**	30,74**	22,63*	17,53*
0,5 x 35	0,187	1,53	0,68	0,38	0,17	0,13	0,097
1 x 35	1,487	12,19	5,43	3,05	1,35	1,00	0,77
2 x 35	11,803	96,79**	43,08**	24,20*	10,74	7,91	6,13
3 x 35	39,546	324,28**	144,34**	81,07**	35,99**	26,5*	20,52*
0,5 x 40	0,213	1,75	0,78	0,44	0,19	0,14	0,111
1 x 40	1,702	13,95	6,21	3,49	1,55	1,14	0,88
2 x 40	13,516	110,83**	49,33*	27,71*	12,30	9,06	7,02
3 x 40	45,317	371,60**	165,41**	92,90**	41,24*	30,36*	23,52
0,5 x 45	0,240	1,97	0,88	0,49	0,22	0,16	0,125
1 x 45	1,916	15,72	6,99	3,93	1,74	1,28	0,99
2 x 45	15,228	124,87**	55,58*	31,22*	13,86*	10,20*	7,90
3 x 45	51,091	418,94**	186,48**	104,74**	46,49*	34,23*	26,52*

* Valores entre P_e e P_{et}

** Valores acima de P_{et}

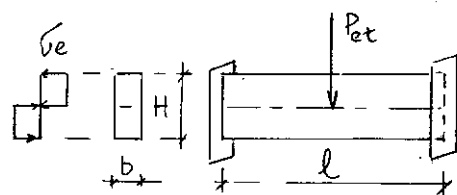
O quadro abaixo fornece valores de carga P_e atuante na peça que promove o início do escoamento na seção média.



QUADRO III.12

	Valores de $P_e = (2 \sigma_e H^2 b) / 3l$					
Seção (cm x cm)	$l = 1\text{ m}$	$l = 1,5\text{ m}$	$l = 2,0\text{ m}$	$l = 3,0\text{ m}$	$l = 3,5\text{ m}$	$l = 4,0\text{ m}$
0,5 x 30	7,2	4,8	3,6	2,4	2,06	1,8
1 x 30	14,4	9,6	7,2	4,8	4,11	3,6
2 x 30	28,8	19,2	14,4	9,6	8,23	7,2
3 x 30	43,2	28,8	21,6	14,4	12,34	10,8
0,5 x 35	9,8	6,53	4,9	3,27	2,8	2,45
1 x 35	19,6	13,07	9,8	6,53	5,6	4,9
2 x 35	39,2	26,13	19,6	13,07	11,2	9,8
3 x 35	58,8	39,2	29,4	19,6	16,8	14,7
0,5 x 40	12,8	8,53	6,4	4,27	3,66	3,2
1 x 40	25,6	17,07	12,8	8,53	7,31	6,4
2 x 40	51,2	34,13	25,6	17,07	14,63	12,80
3 x 40	76,8	51,2	38,4	25,6	21,94	19,2
0,5 x 45	16,2	10,8	8,10	5,4	4,63	4,05
1 x 45	32,4	21,6	16,2	10,8	9,26	8,10
2 x 45	64,8	43,2	32,4	21,6	18,51	16,2
3 x 45	97,2	64,8	48,6	32,4	27,77	24,3

O quadro abaixo fornece valores de carga P_{et} , que plastificam totalmente a seção do meio do vão.



QUADRO III.13

Valores de $P_{et} = (\sigma_e H^2 b) / \ell = 1,5 P_e$						
Seção (cm x cm)	$\ell = 1\text{ m}$	$\ell = 1,5\text{ m}$	$\ell = 2,0\text{ m}$	$\ell = 3,0\text{ m}$	$\ell = 3,5\text{ m}$	$\ell = 4,0\text{ m}$
0,5 x 30	10,8	7,2	5,4	3,6	3,09	2,7
1 x 30	21,6	14,4	10,8	7,2	6,17	5,4
2 x 30	43,2	28,8	21,6	14,4	12,35	10,8
3 x 30	64,8	43,2	32,4	21,6	18,51	16,2
0,5 x 35	14,7	9,8	7,35	4,91	4,2	3,68
1 x 35	29,4	19,61	14,7	9,8	8,4	7,35
2 x 35	58,8	39,2	29,4	19,61	16,8	14,7
3 x 35	88,2	58,8	44,1	29,4	29,7	22,05
0,5 x 40	19,2	12,8	9,6	6,41	5,49	4,8
1 x 40	38,4	25,61	19,2	12,8	10,97	9,6
2 x 40	76,8	51,2	38,4	25,6	21,95	19,2
3 x 40	115,2	76,8	57,6	38,4	32,91	28,8
0,5 x 45	24,3	16,2	12,15	8,1	6,95	6,08
1 x 45	48,6	32,4	24,3	16,2	13,89	12,15
2 x 45	97,2	64,8	48,6	32,4	27,77	24,3
3 x 45	145,8	97,2	72,9	48,6	41,66	36,45

CAPITULO IV

INSTITUIÇÃO DA FLAMBAGEM TRANSVERSAL OU KIPPE NO REGIME ELASTO-PLÁSTICO

Até aqui todas as aplicações se restringem à peça em regime elástico e as tabelas anteriores fornecem valores de carga crítica que algumas vezes são superiores à carga que levaria a peça ao escoamento. Em visto disto, uma incôgnita permanece a respeito da carga crítica de Kippe, quando a estrutura já em fase elasto-plástica só responde à solicitação externa com parcela de sua resistência, uma vez que esta fica reduzida pela presença da região plastificada.

4.1 - Aplicações

Neste Capítulo, veremos qual o procedimento e as considerações de cálculo no uso da equação diferencial (III.1), levando-se em conta a plastificação total ou parcial da peça como se segue:

Seja a Figura (IV.1)

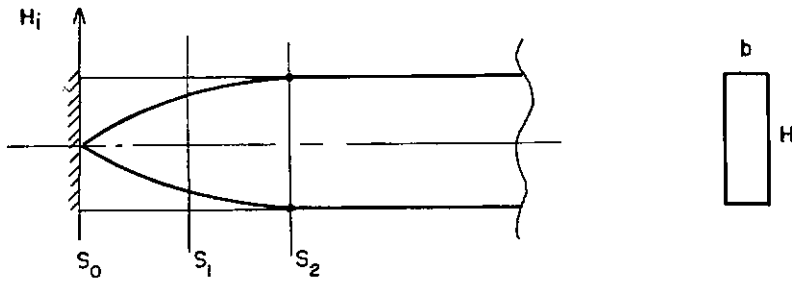


Fig. IV.1

Cálculo do Momento Resistente (M_R):

a) Seção S_0 - totalmente plastificada

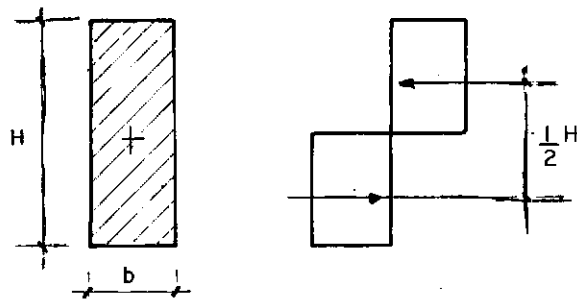


Fig. IV.2

$$M_R = \frac{\sigma_e b H^2}{4}$$

(IV.1)

b) Seção S_1 - Parcialmente Plastificada

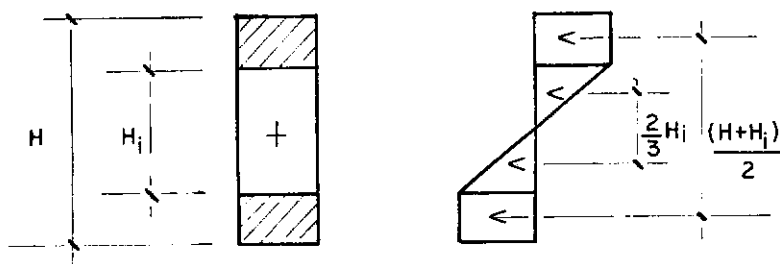
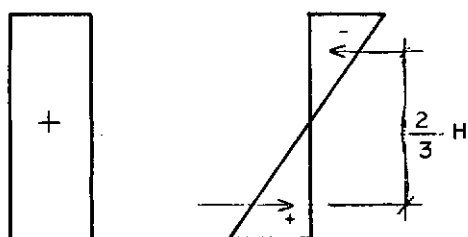


Fig.IV.3

$$M_R = \frac{\sigma_e b}{12} (3 H^2 - H_1^2) \quad (\text{IV.2})$$

c) Seção S_2 - Em início de Escoamento:



$$M_R = \frac{\sigma_e b H^2}{6} \quad (\text{IV.3})$$

Fig.IV.4

4.1-1 - Viga em Balanço

A curva que define o limite da região plastificada é função do carregamento que atua na haste. Para a viga em balanço se o carregamento é uma carga puntual P como na Figura IV.5 a equação é a de uma parábola (Eq. IV.5). Se se tratar de carga uniforme distribuída (Fig. IV.6) a curva desenvolvida é uma elipse (Eq. IV.7), que é apresentada no item b.

a) Carga Concentrada

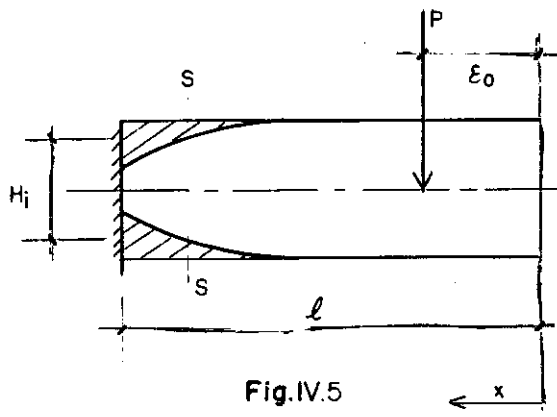


Fig. IV.5

Momento Atuante M_A na Seção S:

$$M_A = P (x - x_0) \quad (\text{IV.4})$$

b) Igualando M_A à Eq. IV.2 tem-se:

$$x = \left(\epsilon_0 + \frac{\sigma_e b H^2}{4 P} \right) - \frac{\sigma_e b}{12 P} H_i^2 \quad (\text{IV.5})$$

que só é aplicável para posições de x em que a seção já começa a plastificar, (V. Fig.IV.6); assim sendo, com a Eq. (IV.4) em (IV.3) tira-se que:

$$\ell > x > \varepsilon_0 + \frac{\sigma_e b H^2}{6 P} \quad (\text{IV.6})$$

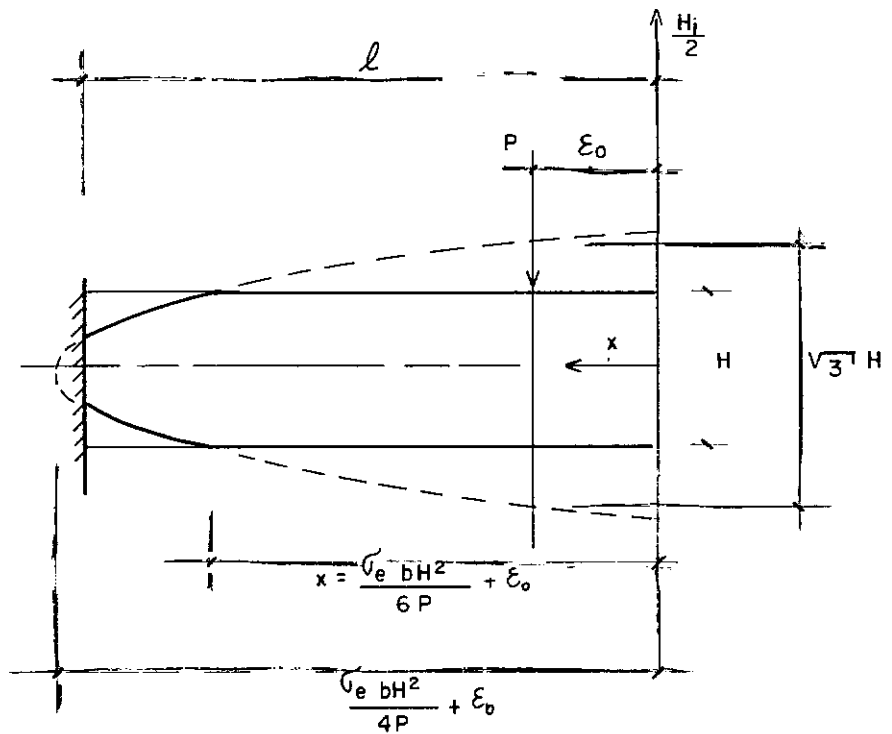


Fig.IV.6

No caso particular, em que a carga P está aplicada na extremidade do balanço (que estudaremos adiante), to-

das as equações são consideradas fazendo-se $\epsilon_0 = 0$ e na Fig. IV.6 teremos o eixo $(H_i/2)$ deslocado para coincidir com a carga.

b) Carga Distribuída

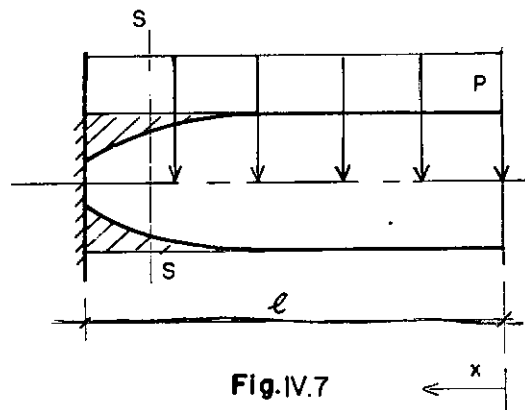


Fig. IV.7

Momento Atuante M_A na seção S:

$$M_A = \frac{px^2}{2}$$

Igualando M_A à Eq. (IV.2) tem-se:

$$\frac{x^2}{\left(\frac{\sigma_e b H^2}{2 p}\right)} + \frac{H_i^2}{3 H^2} = 1 \quad (\text{IV.7})$$

que é aplicável às posições de x a partir daquela em que começa a plastificação (Eq. IV.3 igualando a M_A).

$$\ell > x > \sqrt{\frac{\sigma_e \cdot b \cdot H^2}{3 p}} \quad (\text{IV.8})$$

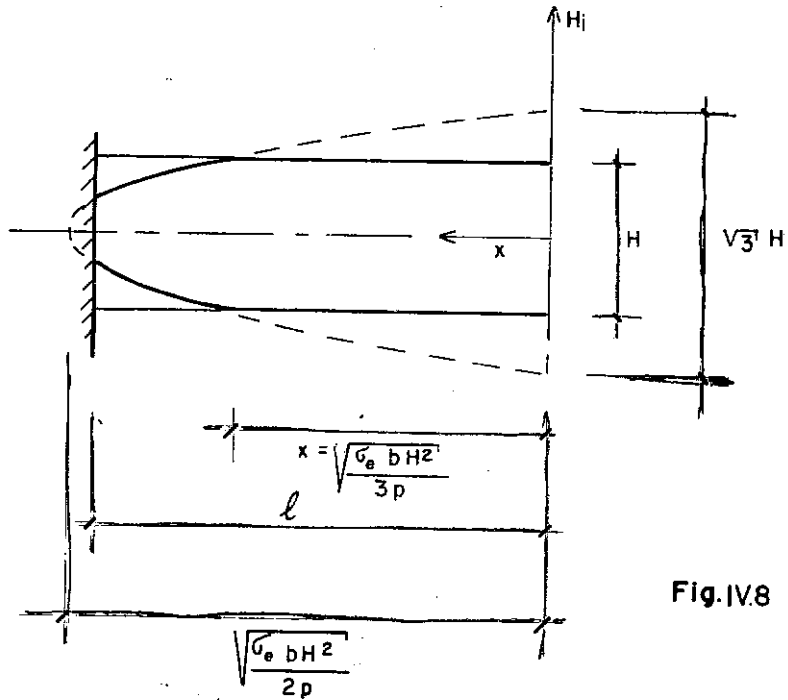


Fig.IV.8

Para o estudo atual, vamos nos limitar somente à carga puntual aplicada na extremidade do balanço.

4.1-1.1 - Carga Concentrada P na Extremidade do Balanço

O valor do momento solicitante numa seção distante x da extremidade, é $M_A = Px$. Igualando M_A à Eq. (IV.3)

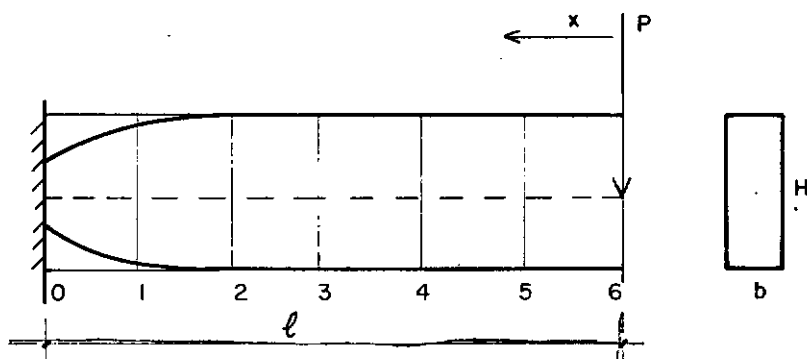


Fig. IV.9

obtêm-se:

$$x = \frac{\sigma_e b H^2}{6 P} \quad (\text{IV.9})$$

que indica a posição em que a peça inicia a plastificação. O valor da carga P_{et} que plastifica totalmente a seção S_0 vem da igualdade da equação (IV.1) com $M_A = P\ell$.

$$P_{et} = \frac{\sigma_e b H^2}{4 \ell} \quad (\text{IV.10})$$

Substituindo-se a Eq. (IV.10) em (IV.9), chega-se a

$$x = \frac{2}{3} \ell$$

Posição esta em que ocorre o início da plastificação sempre que a peça está sujeita a P_{et} . (Conforme Fig. IV.1 esta posição coincide com S_2 quando a haste tem 6 divisões).

Considerando $x = \frac{5}{6}$ & na Eq. (IV.9) obtém-se

$P = \frac{4}{5} P_{et}$, quando se tem em S_1 o início da configuração plástica, portanto:

QUADRO IV.1

$P_{Atuante}$	Início Plastificação
$\frac{4}{5} P_{et} < P < P_{et}$	entre S_1 e S_2
$P < \frac{4}{5} P_{et}$	entre S_0 e S_1

Considere-se a configuração da Figura IV.9:

$$\frac{d^2 \psi}{dx^2} + K^2 x^2 \psi = 0$$

conforme Eq. (III.4)

$$\text{sendo } K^2 = \frac{P^2}{B' R_T}$$

Para resolução do problema considerar-se-ã, altu
ras menores para as seções atingida pela plastificação, do que
resulta menor rigidez e momento de inércia a torsão também redu
zidos, logo:

QUADRO IV.2

Seção	K
S_1	K_B
$S_2 \rightarrow S_6$	K_C

chamando $K_B^2 = \alpha K_C^2$ e aplicando a Eq. (III.4) aos pontos
da Fig. IV.9:

$$\left\{ \begin{array}{l} \psi_1'' + \alpha K_C^2 x_1^2 \psi_1 = 0 \\ \psi_2'' + K_C^2 x_2^2 \psi_2 = 0 \\ \vdots \\ \psi_6'' + K_C^2 x_6^2 \psi_6 = 0 \end{array} \right. \quad (IV.11)$$

Por diferenças finitas e a condição de que

$\psi_0 = 0$ e $\psi_7 = \psi_6$ tem-se:

$$\begin{array}{lcl}
 x_1 = \frac{5\ell}{6} \rightarrow & \left\{ \begin{array}{l} \frac{\psi_2 - 2\psi_1}{\left(\frac{\ell}{6}\right)^2} + \alpha K_C^2 \left(\frac{5\ell}{6}\right)^2 \psi_1 = 0 \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \end{array} \right. \\
 x_2 = \frac{4\ell}{6} \rightarrow & \left\{ \begin{array}{l} \frac{\psi_3 - 2\psi_2 + \psi_1}{\left(\frac{\ell}{6}\right)^2} + K_C^2 \left(\frac{4\ell}{6}\right)^2 \psi_2 = 0 \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \end{array} \right. \\
 x_3 = \frac{3\ell}{6} \rightarrow & \left\{ \begin{array}{l} \frac{\psi_4 - 2\psi_3 + \psi_2}{\left(\frac{\ell}{6}\right)^2} + K_C^2 \left(\frac{3\ell}{6}\right)^2 \psi_3 = 0 \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \end{array} \right. \\
 x_4 = \frac{2\ell}{6} \rightarrow & \left\{ \begin{array}{l} \frac{\psi_5 - 2\psi_4 + \psi_3}{\left(\frac{\ell}{6}\right)^2} + K_C^2 \left(\frac{2\ell}{6}\right)^2 \psi_4 = 0 \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \end{array} \right. \\
 x_5 = \frac{\ell}{6} \rightarrow & \left\{ \begin{array}{l} \frac{\psi_6 - 2\psi_5 + \psi_4}{\left(\frac{\ell}{6}\right)^2} + K_C^2 \left(\frac{\ell}{6}\right)^2 \psi_5 = 0 \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \end{array} \right. \\
 x_6 = 0 \rightarrow & \left\{ \begin{array}{l} \frac{\psi_7 - 2\psi_6 + \psi_5}{\left(\frac{\ell}{6}\right)^2} + K_C^2 (0)^2 \psi_6 = 0 \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \end{array} \right.
 \end{array}$$

(IV.12)

Simplificando:

$$\left(\alpha K_C^2 \frac{25 \ell^4}{6^4} - 2 \right) \psi_1 + \psi_2 = 0$$

$$\psi_1 + \left(K_C^2 \frac{16 \ell^4}{6^4} - 2 \right) \psi_2 + \psi_3 = 0$$

$$\psi_2 + \left(K_C^2 \frac{9 \ell^4}{6^4} - 2 \right) \psi_3 + \psi_4 = 0$$

$$\psi_3 + \left(K_C^2 \frac{4 \ell^4}{6^4} - 2 \right) \psi_4 + \psi_5 = 0$$

$$\psi_4 + \left(K_C^2 \frac{\ell^4}{6^4} - 2 \right) \psi_5 + \psi_6 = 0$$

$$-\psi_6 + \psi_5 = 0$$

(IV.13)

Denominando:

$$A = \left(\alpha K_C^2 \frac{25}{6^4} \ell^4 - 2 \right) ; \quad B = \left(K_C^2 \frac{16}{6^4} \ell^4 - 2 \right)$$

$$C = \left(K_C^2 \frac{9}{6^4} \ell^4 - 2 \right) ; \quad D = \left(K_C^2 \frac{4}{6^4} \ell^4 - 2 \right) ; \quad E = \left(K_C^2 \frac{\ell^4}{6^4} - 2 \right)$$

temos o sistema de equações; em função de matriz:

$$\begin{bmatrix} A & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & B & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & C & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & D & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & E & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \\ \psi_4 \\ \psi_5 \\ \psi_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (\text{IV.14})$$

cuja Matriz M (6 x 6) deve ter determinante nulo:

$$|M| = \Delta_1 + \Delta_2 = 0$$

$$\Delta_1 = (-1) \begin{vmatrix} A & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & B & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & C & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & D & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & E \end{vmatrix} \quad \Delta_2 = -(1) \begin{vmatrix} A & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & B & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & C & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & D & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\Delta_1 = (-1) \left[E \begin{vmatrix} A & 1 & 0 & 0 \\ 1 & B & 1 & 0 \\ 0 & 1 & C & 1 \\ 0 & 0 & 1 & D \end{vmatrix} + -(1) \begin{vmatrix} A & 1 & 0 & 0 \\ 1 & B & 1 & 0 \\ 0 & 1 & C & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \right]$$

$$\Delta_1 = (-1) \left[E \left\{ D \begin{vmatrix} A & 1 & 0 \\ 1 & B & 1 \\ 0 & 1 & C \end{vmatrix} + (-1) \begin{vmatrix} A & 1 & 0 \\ 1 & B & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \right\} + (-1) \begin{vmatrix} A & 1 & 0 \\ 1 & B & 1 \\ 0 & 1 & C \end{vmatrix} \right]$$

$$\Delta_2 = -(-1) \begin{vmatrix} A & 1 & 0 & 0 \\ 1 & B & 1 & 0 \\ 0 & 1 & C & 1 \\ 0 & 0 & 1 & D \end{vmatrix} = -(-1) \left[D \begin{vmatrix} A & 1 & 0 \\ 1 & B & 1 \\ 0 & 1 & C \end{vmatrix} + (-1) \begin{vmatrix} A & 1 & 0 \\ 1 & B & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \right]$$

$$\Delta_1 = (1 - ED) (ABC - A - C) + E (AB - 1)$$

$$\Delta_2 = -D (ABC - A - C) + (AB - 1)$$

$$|M| = (1 - ED - D) (ABC - A - C) + (E + 1) (AB - 1) = 0$$

Resultados Intermediários:

$$AB = \alpha \frac{400}{6^8} \ell^8 K_C^4 - \left[\alpha \frac{50}{6^4} + \frac{32}{6^4} \right] \ell^4 K_C^2 + 4$$

$$ABC = \alpha \frac{3600}{6^{12}} \ell^{12} K_C^6 - \left[\alpha \frac{1250}{6^8} + \frac{288}{6^8} \right] \ell^8 K_C^4 + \left[\alpha \frac{100}{6^4} + \frac{100}{6^4} \right] \ell^4 K_C^2 - 8$$

$$ED = \frac{4}{6^8} \ell^8 K_C^4 - \frac{10}{6^4} \ell^4 K_C^2 + 4$$

$$(ABC-A-C) = \alpha \frac{3600}{6^{12}} \ell^{12} K_C^6 - \left[\alpha \frac{1250}{6^8} + \frac{288}{6^8} \right] \ell^8 K_C^4 + \left[\alpha \frac{75}{6^4} + \frac{91}{6^4} \right] \ell^4 K_C^2 - 4$$

$$(1 - ED - D) = - \frac{4}{6^8} \ell^8 K_C^4 + \frac{6}{6^4} \ell^4 K_C^2 - 1$$

$$(1 - ED - D) (ABC - A - C) = - \alpha \frac{14400}{6^{20}} \ell^{20} K_C^{10} \left[\alpha \frac{26600}{6^{16}} + \frac{1152}{6^{16}} \right] \ell^{16} K_C^8 -$$

$$- \left[\alpha \frac{11400}{6^{12}} + \frac{2092}{6^{12}} \right] \ell^{12} K_C^6 + \left[\alpha \frac{1700}{6^8} + \frac{850}{6^8} \right] \ell^8 K_C^4 - \left[\alpha \frac{75}{6^4} + \frac{115}{6^4} \right] \ell^4 K_C^2 + 4$$

$$(E+1) (AB-1) = \alpha \frac{400}{6^{12}} \ell^{12} K_C^6 - \left[\alpha \frac{450}{6^8} + \frac{32}{6^8} \right] \ell^4 K_C^4 + \left[\alpha \frac{50}{6^4} + \frac{35}{6^4} \right] \ell^4 K_C^2 - 3$$

Equação Resultante (com sinal trocado):

$$\begin{aligned} & \alpha \frac{14400}{6^{20}} \ell^{20} K_C^{10} - \left[\alpha \frac{26600}{6^{16}} + \frac{1152}{6^{16}} \right] \ell^{16} K_C^8 + \left[\alpha \frac{11000}{6^{12}} + \frac{2092}{6^{12}} \right] \ell^{12} K_C^6 + \\ & - \left[\alpha \frac{1250}{6^8} + \frac{818}{6^8} \right] \ell^8 K_C^4 + \left[\alpha \frac{25}{6^4} + \frac{80}{6^4} \right] \ell^4 K_C^2 - 1 = 0 \end{aligned} \quad (IV.15)$$

Seja o exemplo:

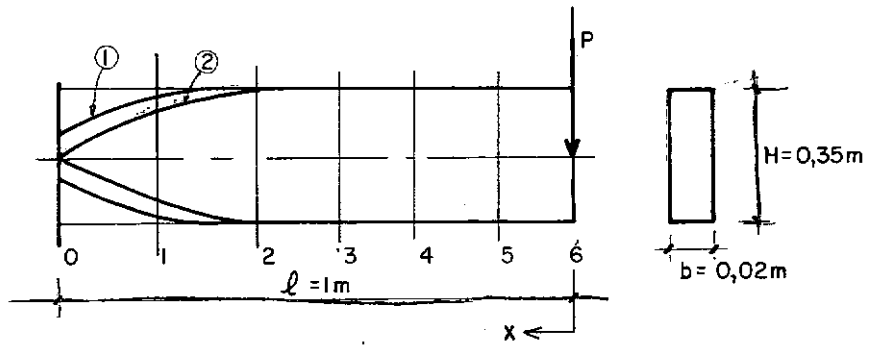


Fig.IV.10

1) Adotemos a configuração plástica (1) da Figura IV.10

Da Eq. (IV.10) temos $P_{et} = 14,7 \text{ tf}$

Tomemos $P = 13 \text{ tf} > \frac{4}{5} P_{et}$

De (IV.5), para $\epsilon_0 = 0$, tem-se:

$$H_i = \sqrt{3 H^2 - \frac{12 P x_i}{\sigma_e b}} \quad (\text{IV.16})$$

juntamente com a Eq. (III.11), (III.12) e quadro III.2 vem:

QUADRO IV.3

Seção	H_i	B'	R_T	$B' R_T$	α
S_1	0,311	4,372	6,266	27,397	1,27
$S_2 \rightarrow S_6$	0,35	4,916	7,085	34,830	

onde

$$\alpha = \frac{K_B^2}{K_C^2} = \frac{(B' R_T)_2}{(B' R_T)_1} \quad (\text{IV.17})$$

Utilizando a Eq. (IV.15) para $\ell = 1 \text{ m}$ e $\alpha = 1,27$ tem-se:

$$5,002 \times 10^{-12} K_C^{10} - 1,238 \times 10^{-8} K_C^8 + 7,379 \times 10^{-6} K_C^6 - 1,432 \times 10^{-3} K_C^4 + 0,086 K_C^2 - 1 = 0$$

cujas menores raízes positivas são $K_C = 3,89$.

$$P^2 = K_C \sqrt{B' R_T}$$

$$P_{cr} = 3,89 \sqrt{34,83} = 22,9 \text{ tf} > P_{et}; \text{ i.e.,}$$

P_{cr} não será atingido

- 2) Adotemos a configuração plástica (2) da Fig. (IV.10) para o mesmo exemplo.

A peça está sujeita a $P_{et} = 14,7 \text{ tf}$

$$\text{Da Eq. (IV.16)} \quad H_i = \sqrt{\frac{1}{2}} H$$

QUADRO IV.4

S	H_i	B'	R_T	$B' R_T$	α
S_i	0,247	3,480	4,922	17,14	2,03
$S_2 \rightarrow S_6$	0,35	4,916	7,085	34,83	

Com a Eq. (IV.15), fazendo-se $\ell = 1 \text{ m}$ e $\alpha = 2,03$,

surge:

$$7,995 \times 10^{-12} K_C^{10} - 1,955 \times 10^{-8} K_C^8 + 1,122 \times 10^{-5} K_C^6 - 1,998 \times 10^{-3} K_C^4 + 0,101 K_C^2 - 1 = 0$$

donde $K_C = 3,7$

temos:

$$P_{cr} = 3,7 \sqrt{34,83} = 21,8 \text{ tf} > P_{et}; \text{ i.e.,}$$

P_{cr} não será atingido.

Resumindo:

QUADRO IV.5

Dimensão (m x m)	Vão	P_e	P_{et}	P_{usado}	P_{cr}	P_{cr}^{el}
0,02 x 0,35	1 m	9,8	14,7	13,0	22,9	23,37
0,02 x 0,35	1 m	9,8	14,7	14,7	21,8	23,37

Como se observa, a carga crítica da peça plástificada parcial ou totalmente em sua seção mais crítica, é menor do que o P_{cr} em fase elástica. Porém, neste exemplo vê-se que a peça não suportaria esta carga crítica ($P_{cr} = 21,8$) por que muito antes ($P = 14,7$) já teria alcançado a ruína por flexão.

Para alguns exemplos, como veremos na tabela seguinte, o valor de P_{cr} diminui de tal forma, a cada configuração plástica, que chega a coincidir ou mesmo ser menor do que a carga P_{et} de plastificação total da peça.

OBS.: Se													DIMENSÃO 0,03 x 0,35 - (B' R _T) = 390,97 → $\sqrt{(B' R_T)} = 19,77$			
P _{usado} = P _{et}													(m x m) Seção 2			
⇒ H ₁ = $\sqrt{1/2}$ H																
λ	H ₁	B'	R _T	B' R _T	α	E Q U A Ç Ã O IV.15	K _C	pe _{cr}	P _{cr}	P _{usado}	P _{et}	P _e				
1,0*	0,322	15,348	21,482	329,71	1,186	$4,67 \times 10^{-12} K_C^{10} - 1,159 \times 10^{-8} K_C^8 + 6,95 \times 10^{-6} K_C^6 - 1,37 \times 10^{-3} K_C^4 + 0,085 K_C^2 - 1 = 0$	3,92	78,3	77,50	19,0	22,05	14,7				
	0,247	11,845	16,238	192,34	2,033	$8,0 \times 10^{-12} K_C^{10} - 1,95 \times 10^{-8} K_C^8 + 1,123 \times 10^{-5} K_C^6 - 2,0 \times 10^{-3} K_C^4 + 0,101 K_C^2 - 1 = 0$	3,61	78,3	71,38	22,05	22,05	14,7				
1,5*	0,322	15,348	21,482	329,71	1,186	$1,55 \times 10^{-8} K_C^{10} - 7,61 \times 10^{-6} K_C^8 + 9,02 \times 10^{-4} K_C^6 - 0,036 K_C^4 + 0,428 K_C^2 - 1 = 0$	1,75	34,8	34,6	12,67	14,7	9,8				
	0,247	11,845	16,238	192,34	2,033	$2,66 \times 10^{-8} K_C^{10} - 1,286 \times 10^{-5} K_C^8 + 1,457 \times 10^{-3} K_C^6 - 0,051 K_C^4 + 0,511 K_C^2 - 1 = 0$	1,605	34,8	31,73	14,7	14,7	9,8				
2,0*	0,322	15,348	21,482	329,71	1,186	$4,89 \times 10^{-6} K_C^{10} - 7,596 \times 10^{-4} K_C^8 + 0,028 K_C^6 - 0,351 K_C^4 + 1,354 K_C^2 - 1 = 0$.98	19,58	19,38	9,5	11,03	7,35				
	0,247	11,845	16,238	192,34	2,033	$8,396 \times 10^{-6} K_C^{10} - 1,28 \times 10^{-3} K_C^8 + 0,046 K_C^6 - 0,512 K_C^4 + 1,615 K_C^2 - 1 = 0$.903	19,58	17,85	11,03	11,03	7,35				
3,0*	0,322	15,348	21,482	329,71	1,186	$1,63 \times 10^{-2} K_C^{10} - 0,499 K_C^8 + 3,696 K_C^6 - 8,989 K_C^4 + 6,853 K_C^2 - 1 = 0$.44	8,7	8,55	6,33	7,35	4,9				
	0,247	11,845	16,238	192,34	2,033	$2,79 \times 10^{-2} K_C^{10} - 0,843 K_C^8 + 5,97 K_C^6 - 13,122 K_C^4 + 8,177 K_C^2 - 1 = 0$.403	8,7	7,96	7,35	7,35	4,9				
3,5**	0,322	15,348	21,482	329,71	1,186	$0,355 K_C^{10} - 5,878 K_C^8 + 23,5 K_C^6 - 30,84 K_C^4 + 12,696 K_C^2 - 1 = 0$.320	6,41	6,32	5,43	6,3	4,2				
	0,247	11,845	16,238	192,34	2,033	$0,609 K_C^{10} - 9,928 K_C^8 + 37,96 K_C^6 - 45,04 K_C^4 + 15,15 K_C^2 - 1 = 0$.295	6,41	5,83	6,3	6,3	4,2				
4,0**	0,322	15,348	21,482	329,71	1,186	$5,126 K_C^{10} - 209,74 K_C^8 + 116,67 K_C^6 - 89,76 K_C^4 + 21,66 K_C^2 - 1 = 0$.246	5,62	4,87	4,76	5,52	368				
	0,247	11,845	16,238	192,34	2,033	$8,804 K_C^{10} - 84,08 K_C^8 + 188,48 K_C^6 - 131,07 K_C^4 + 25,8 K_C^2 - 1 = 0$.226	5,62	4,47	5,52	5,52	368				

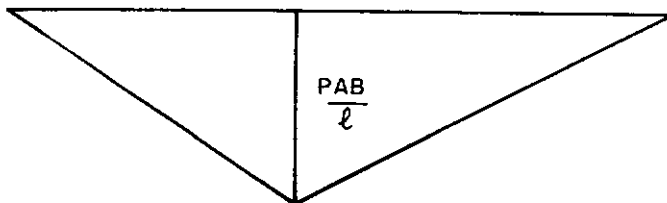
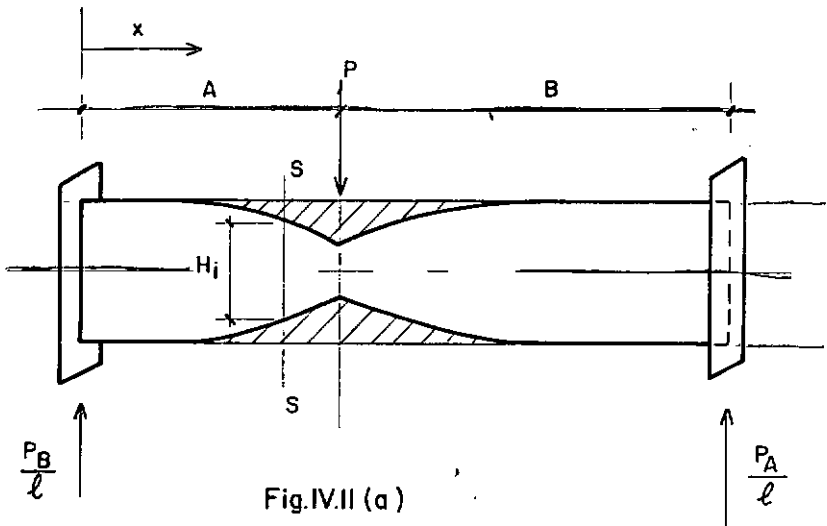
QUADRO IV.7

$$H_1 = \sqrt{3 H^2 - \frac{12 P x}{b \sigma_e}}$$

DIMENSÃO	$(B' R_T)_2$	H_1	$(B' R_T)_1$	α	E Q U A Ç Ã O (IV.15)	K_c	P_{cr}	P_{cr}^{el}	$P_{atuante}$	P_e	P_{et}
2 x 30 ▽	25,642	.248	17,277	1,474	$6,086 \times 10^{-6} K_C^{10} - 9,37 \times 10^{-4} K_C^8 + 3,44 \times 10^{-2} K_C^6 - 0,405 K_C^4 + 1,443 K_C^2 - 1 = 0$.958	4,83	5,0	5,0	3,6	5,4
$l = 2m$	25,642	.212	12,548	2,029	$8,38 \times 10^{-6} K_C^{10} - 1,28 \times 10^{-3} K_C^8 + 4,59 \times 10^{-2} K_C^6 - 0,511 K_C^4 + 1,614 K_C^2 - 1 = 0$.903	4,55	5,0	5,4	3,6	5,4
2 x 30 *	25,462	.248	17,277	1,474	$1,93 \times 10^{-8} K_C^{10} - 9,397 \times 10^{-6} K_C^8 + 1,091 \times 10^{-3} K_C^6 - 4,060 \times 10^{-2} K_C^4 + 0,456 K_C^2 - 1 = 0$	1,69	8,53	8,88	6,67	4,8	7,2
$l = 1,5 m$	25,462	.212	12,548	2,029	$2,65 \times 10^{-8} K_C^{10} - 1,28 \times 10^{-5} K_C^8 + 1,455 \times 10^{-3} K_C^6 - 0,051 K_C^4 + 0,5106 K_C^2 - 1 = 0$	1,6	8,07	8,88	7,2	4,8	7,2
3 x 30 *	285,29	.248	193,096	1,477	$0,443 K_C^{10} - 7,269 K_C^8 + 28,469 K_C^6 - 35,72 K_C^4 + 13,539 K_C^2 - 1 = 0$.31	5,24	5,47	4,29	3,09	4,64
$l = 3,5 m$	285,29	.212	139,894	2,039	$0,611 K_C^{10} - 9,956 K_C^8 + 38,066 K_C^6 - 45,138 K_C^4 + 15,165 K_C^2 - 1 = 0$.294	4,96	5,47	4,64	3,09	4,64
2 x 35 **	34,83	.283	22,609	1,541	$2,018 K_C^{10} - 9,812 K_C^8 + 1,135 \times 10^{-3} K_C^6 - 4,187 \times 10^{-2} K_C^4 + 0,463 K_C^2 - 1 = 0$	1,69	9,97	10,39	9,2	6,53	9,8
$l = 1,5 m$	34,83	.247	17,203	2,025	$2,652 \times 10^{-8} K_C^{10} - 1,28 \times 10^{-5} K_C^8 + 1,45 \times 10^{-3} K_C^6 - 0,051 K_C^4 + 0,510 K_C^2 - 1 = 0$	1,64	9,68	10,39	9,8	6,53	9,8
3 x 45 ▽ $l = 4,0 m$	652,56	.45	652,56	1,0	$4,33 K_C^{10} - 42,25 K_C^8 + 100,905 K_C^6 - 80,69 K_C^4 + 20,741 K_C^2 - 1 = 0$.249	6,36	7,25	6,08	6,08	9,12

4.1-2 - Viga Bi-Apoiada com Engaste à Torção

Como já foi dito, a curva que limita a região plastificada é função da carga ou melhor dizendo, do momento atuante M_A . Para a viga bi-apoiada com engaste à torção, teremos uma configuração parabólica quando se tratar de cargas concentradas, como veremos a seguir:



Considerando a parte da haste à esquerda da carga P , tem-se:

$$M_A = \frac{PB}{\ell} x \quad (\text{IV.18})$$

Igualando M_A à Eq. (IV.2) virá a equação da parábola:

$$x = \left(\frac{\sigma_e b H^2 \ell}{6 P B} \right) - \frac{\sigma_e b \ell H_i^2}{12 P B} \quad (\text{IV.19})$$

que é aplicável na posição x em que a peça começa a plastificar, posição esta definida igualando-se o momento atuante M_A (Eq. IV.18) ao resistente M_R (Eq. IV.3)

$$A > x > \frac{\sigma_e b \ell H^2}{6 P B} \quad (\text{IV.20})$$

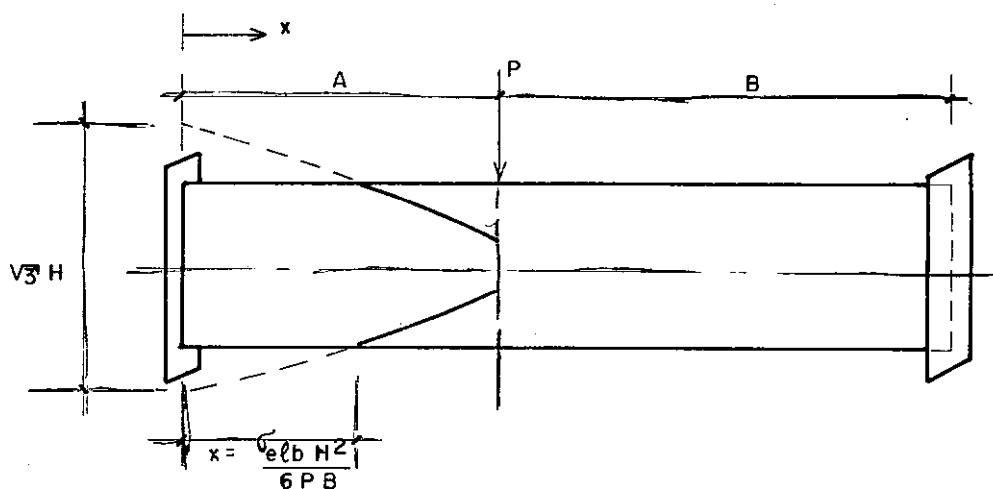
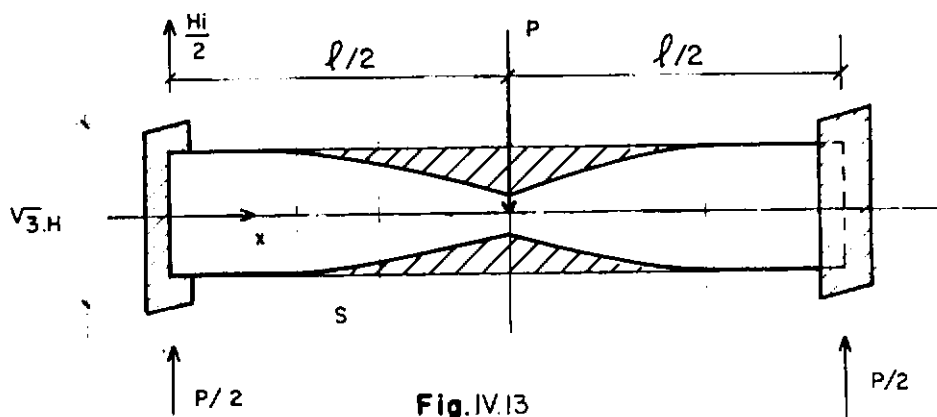


Fig. IV.12

4.1-2.1 - Carga Concentrada no Meio do Vão

No caso particular em que a carga é aplicada no meio do vão, os setores plásticos formados são idênticos e simétricos e as fórmulas anteriores são as mesmas com $B = \frac{l}{2}$.

Da Eq. (IV.18):

$$\text{Momento Atuante} \quad M_A = \frac{P}{2} x \quad (\text{IV.21})$$

$$\text{Momento Meio Vão} \quad M_A = \frac{Pl}{4} \quad (\text{IV.22})$$

Da Eq. (IV.19):

Equação da curva

$$x = \frac{\sigma_e b H^2}{3 P} - \frac{\sigma_e b}{6 P} H_i^2 \quad (\text{IV.23})$$

E como na Fig. IV.12, tem-se que

$$x = \frac{\sigma_e b H^2}{3 P} \quad (\text{IV.24})$$

é a posição em que a peça inicia a plastificação.

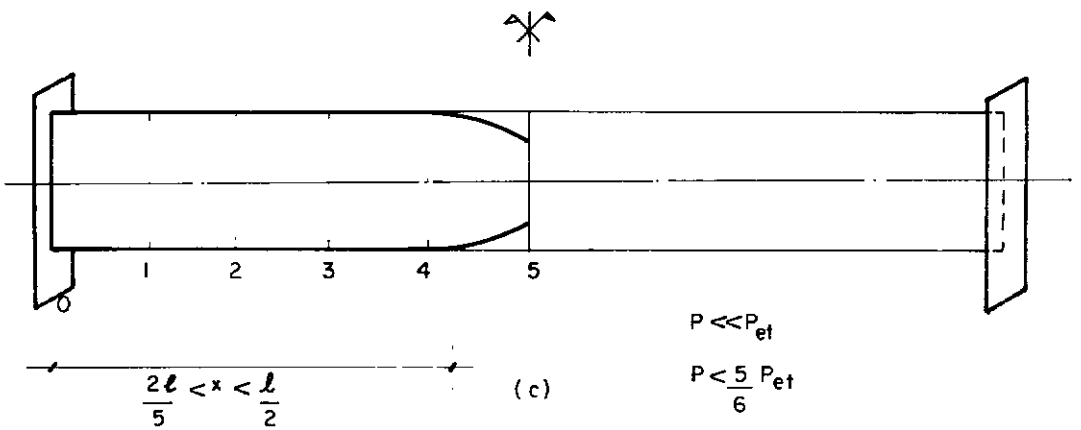
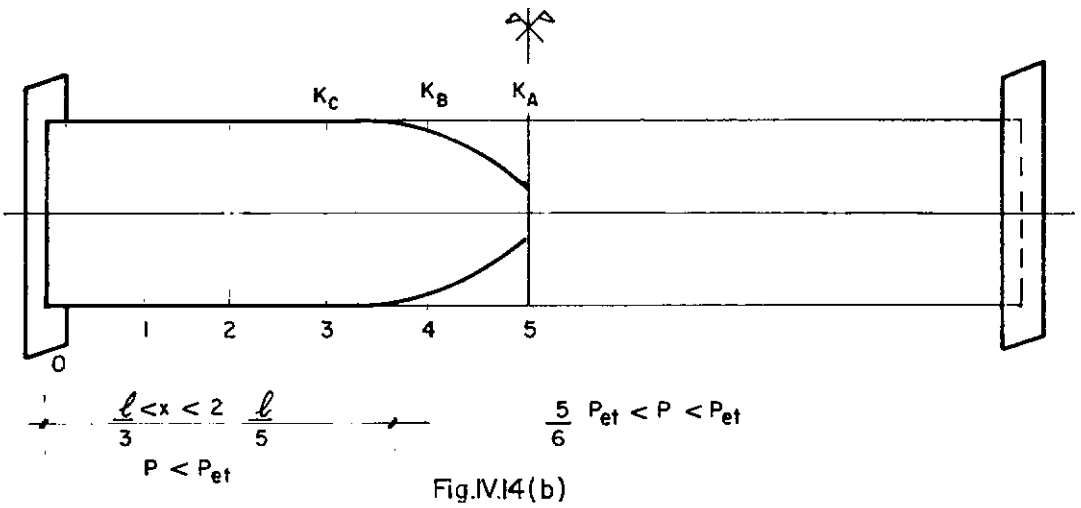
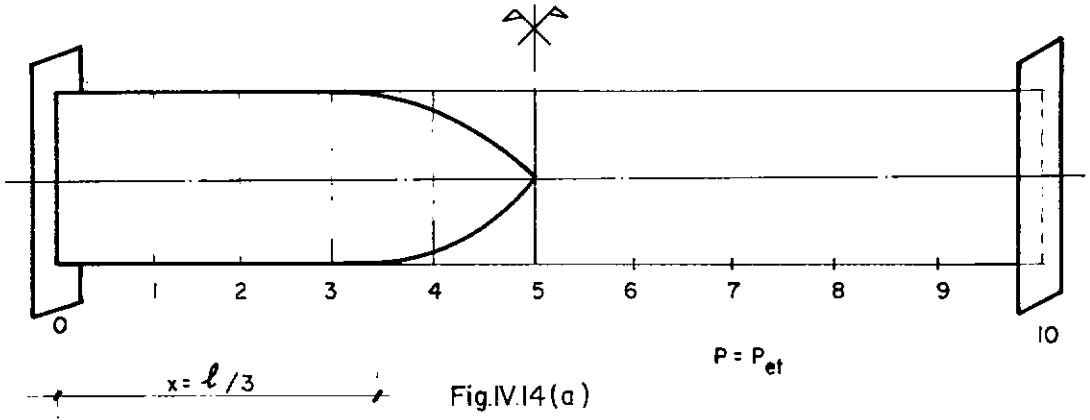
A carga P_{et} que causa a plastificação total na seção sob a qual P_{usado} é aplicado obtém-se, igualando-se a Eq. (IV.22) à (IV.1)

$$P_{et} = \frac{\sigma_e b H^2}{l} \quad (\text{IV.25})$$

Estando P_{et} agindo na peça, a posição de início de plastificação fica bem definida quando se toma $P = P_{et}$, na Eq. (IV.24), resultando $x = \frac{l}{3}$, posição que se situa entre 3 e 4 conforme Fig. IV.14a.

Outras configurações plásticas são assumidas pela peça para cargas $P < P_{et}$, conforme Fig. IV.14-b e IV.14-c.

A carga $P_{Atuante}$ que define a configuração plástica iniciando-se na seção 4 é de $\frac{5}{6} P_{et}$ que é obtido substituindo $x = \frac{4}{10} l$ na Eq. (IV.9).



Assim sendo:

QUADRO IV.8

P_{Atuante}	Início Plastificação
$\frac{5}{6} P_{\text{et}} < P < P_{\text{et}}$	entre S_3 e S_4
$P < \frac{5}{6} P_{\text{et}}$	entre S_4 e S_5

Considere-se, então, configurações tais como Fi gura IV.14-b e IV.14-c, para o estudo da haste. Nas seções atingidas pela plastificação, tomam-se alturas reduzidas resultando menor rigidez e menores valores de R_T e portanto diferentes valores de K :

QUADRO IV.9

Seção	K
$S_0 \rightarrow S_3$	K_C
S_4	K_B
S_5	K_A

Chamando:

$$K_B^2 = \alpha K_C^2 \quad \text{e} \quad K_A^2 = \beta K_C^2$$

$$\left. \begin{aligned} \alpha &= (B' R_T)_3 / (B' R_T)_4 > 1 \\ \beta &= (B' R_T)_3 / (B' R_T)_5 > 1 \end{aligned} \right\} \quad (\text{IV.25})$$

Tem-se ao aplicar (III.4) aos pontos:

$$\left\{ \begin{aligned} \psi_1'' + K_C^2 x_1^2 \psi_1 &= 0 \\ \psi_2'' + K_C^2 x_2^2 \psi_2 &= 0 \\ \psi_3'' + K_C^2 x_3^2 \psi_3 &= 0 \\ \psi_4'' + \alpha K_C^2 x_4^2 \psi_4 &= 0 \\ \psi_5'' + \beta K_C^2 x_5^2 \psi_5 &= 0 \end{aligned} \right. \quad (\text{IV.26})$$

Por diferenças finitas e com a condição de que:

$$\psi_0 = 0 \quad (\text{engaste})$$

$$\psi_6 = \psi_4 \quad (\text{simetria})$$

temos ao multiplicar (IV.26) por h^2 , sendo $h = \frac{\ell}{10}$:

$$\left\{ \begin{array}{l} (\psi_2 - 2\psi_1) + K_C^2 \frac{\ell^4}{10^4} \psi_1 = 0 \\ (\psi_3 - 2\psi_2 + \psi_1) + K_C^2 \frac{4}{10^4} \ell^4 \psi_2 = 0 \\ (\psi_4 - 2\psi_3 + \psi_2) + K_C^2 \frac{9}{10^4} \ell^4 \psi_3 = 0 \\ (\psi_5 - 2\psi_4 + \psi_3) + \alpha K_C^2 \frac{16}{10^4} \ell^4 \psi_4 = 0 \\ 2\psi_4 - 2\psi_5 + \beta K_C^2 \frac{25}{10} \ell^4 \psi_5 = 0 \end{array} \right. \quad (\text{IV.27})$$

ou

$$\left\{ \begin{array}{l} (K_C^2 \frac{\ell^4}{10^4} - 2) \psi_1 + \psi_2 = 0 \\ \psi_1 + (K_C^2 4 \frac{\ell^4}{10^4} - 2) \psi_2 + \psi_3 = 0 \\ \psi_2 + (K_C^2 \frac{9}{10^4} \ell^4 - 2) \psi_3 + \psi_4 = 0 \\ \psi_3 + (\alpha K_C^2 \frac{16}{10^4} \ell^4 - 2) \psi_4 + \psi_5 = 0 \\ 2\psi_4 + (\beta K_C^2 \frac{25}{10^4} \ell^4 - 2) \psi_5 = 0 \end{array} \right. \quad (\text{IV.28})$$

Denominando:

$$A = \left(\frac{\ell^4}{10^4} K_C^2 - 2 \right) \quad ; \quad B = \left(\frac{4}{10^4} \ell^4 K_C^2 - 2 \right) \quad ; \quad C = \left(\frac{9}{10^4} \ell^4 K_C^2 - 2 \right)$$

$$D = \left(\alpha \frac{16}{10^4} \ell^4 K_C^2 - 2 \right) \quad ; \quad E = \left(\beta \frac{25}{10^4} \ell^4 K_C^2 - 2 \right)$$

temos o sistema de equações em forma de matriz:

$$\begin{bmatrix} A & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & B & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & C & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & D & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & E \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \\ \psi_4 \\ \psi_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} ;$$

cuja matriz $M (5 \times 5)$ deve ter determinante nulo:

$$|M| = (E) \times \begin{vmatrix} A & 1 & 0 & 0 \\ 1 & B & 1 & 0 \\ 0 & 1 & C & 1 \\ 0 & 0 & 1 & D \end{vmatrix} + (-1) \begin{vmatrix} A & 1 & 0 & 0 \\ 1 & B & 1 & 0 \\ 0 & 1 & C & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

$$|M| = (E) \times (D) \begin{vmatrix} A & 1 & 0 \\ 1 & B & 1 \\ 0 & 1 & C \end{vmatrix} + E (-1) \begin{vmatrix} A & 1 & 0 \\ 1 & B & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} + (-1) (2) \begin{vmatrix} A & 1 & 0 \\ 1 & B & 1 \\ 0 & 1 & C \end{vmatrix} = 0$$

$$|M| = (ED - 2) (ABC - A - C) - E (AB - 1) = 0$$

Resultados Intermediários:

$$(AB) = \frac{4}{10^8} \ell^8 K_C^4 - \frac{10}{10^4} \ell^4 K_C^2 + 4$$

$$(ABC) = \frac{36}{10^{12}} \ell^{12} K_C^6 - \frac{98}{10^8} \ell^8 K_C^4 + \frac{56}{10^4} \ell^4 K_C^2 - 8$$

$$(ABC - A - C) = \frac{36}{10^{12}} \ell^{12} K_C^6 - \frac{98}{10^8} \ell^8 K_C^4 + \frac{46}{10^4} \ell^4 K_C^2 - 4$$

$$(ED - 2) = \alpha \beta \frac{400}{10^8} \ell^8 K_C^4 - \left[\beta \frac{50}{10^4} + \alpha \frac{32}{10^4} \right] \ell^4 K_C^2 + 2$$

$$-E (AB - 1) = -\beta \frac{100}{10^{12}} \ell^{12} K_C^6 + \left[\beta \frac{250}{10^8} + \frac{8}{10^8} \right] \ell^8 K_C^4 - \left[\beta \frac{75}{10^4} + \frac{20}{10^4} \right] \ell^4 K_C^2 + 6$$

$$\begin{aligned} (ED-2)(ABC-A-C) = & \alpha \beta \frac{14400}{10^{20}} \ell^{20} K_C^{10} - \left[\alpha \beta \frac{39200}{10^{16}} + \beta \frac{1800}{10^{16}} + \alpha 1152 \right] \ell^{16} K_C^8 + \\ & + \left[\alpha \beta \frac{18400}{10^{12}} + \beta \frac{4900}{10^{12}} + \alpha \frac{3136}{10^{12}} + \frac{72}{10^{12}} \right] \ell^{12} K_C^6 + \\ & - \left[\alpha \beta \frac{1600}{10^8} + \beta \frac{2300}{10^8} + \alpha \frac{1472}{10^8} + \frac{196}{10^8} \right] \ell^8 K_C^4 + \left[\beta \frac{200}{10^4} + \alpha \frac{128}{10^4} + \frac{92}{10^4} \right] \ell^4 K_C^2 - 8 \end{aligned}$$

Equação Final:

$$\begin{aligned}
 & \alpha \beta \frac{14400}{10^{20}} \ell^{20} K_C^{10} - \left(\alpha \beta \frac{39200}{10^{16}} + \beta \frac{1800}{10^{16}} + \alpha \frac{1152}{10^{16}} \right) \ell^{16} K_C^8 + \\
 & + \left(\alpha \beta \frac{18400}{10^{12}} + \beta \frac{4800}{10^{12}} + \alpha \frac{3136}{10^{12}} + \frac{72}{10^{12}} \right) \ell^{12} K_C^6 - \\
 & - \left(\alpha \beta \frac{1600}{10^8} + \beta \frac{2050}{10^8} + \alpha \frac{1472}{10^8} + \frac{188}{10^8} \right) \ell^8 K_C^4 + \\
 & + \left(\beta \frac{125}{10^4} + \alpha \frac{128}{10^4} + \frac{72}{10^4} \right) \ell^4 K_C^2 - 2 = 0 \quad (\text{IV.29})
 \end{aligned}$$

Considere-se o exemplo da peça de seção transversal (3cm x 35cm).

Sabe-se que apresenta cargas críticas de flambagem lateral diferentes para configurações plásticas diversas.

Assim sendo, exemplificaremos considerando vários vãos e as configurações plásticas I, II, III, conforme a Fig. IV.15, tendendo ao limite IV onde se tem a seção média totalmente plastificada.

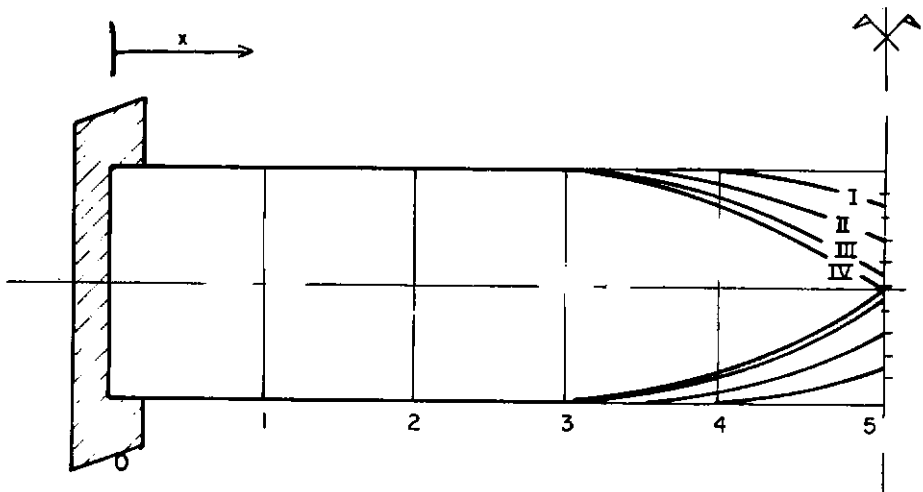


Fig. IV.15

QUADRO IV.10

Curva	Altura da Seção 5	Altura da Seção 4	Posição começo Plastificação	Carga Atuante
I	$\approx 7/10 H$	H	$4,0 \ell/10$	$5/6 P_{et}$
II	$4/10 H$	$0,853 H$	$3,52 \ell/10$	$71/75 P_{et}$
III	$1/10 H$	$0,780 H$	$3,34 \ell/10$	$299/300 P_{et}$
IV	0	$0,775 H$	$3,33 \ell/10$	P_{et}

Adota-se os valores da altura da seção 5, conforme Quadro IV.10, para definição das curvas de I a IV. Para obtenção da carga atuante de cada configuração substitui-se os valores de altura de S_5 e posição $x = \frac{l}{2}$ na Eq.(IV.23). A posição em que se tem início a plastificação é retirada da Eq.(IV.24) para os valores de carga já determinados como acima.

Prosseguindo ao exemplo da peça de seção transversal (3 cm x 35 cm)

QUADRO IV.11

	H_3	H_4	H_5	$(B'R_T)_3$	$(B'R_T)_4$	$(B'R_T)_5$	$\alpha = \frac{(B'R_T)_3}{(B'R_T)_4}$	$\beta = \frac{(B'R_T)_3}{(B'R_T)_5}$
CURVA I	0,35	0,35	0,245	390,98	390,98	189,16	1	2,067
CURVA II	0,35	0,299	0,140	390,98	282,29	59,51	1,385	6,570
CURVA III	0,35	0,273	0,035	390,98	236,07	7,89	1,656	49,554

Considerando agora os respectivos valores de α e β para cada curva e levando-se em conta vãos diferentes, temos que a Equação (IV.29) resolvida nos fornece valores de K_c conforme a tabela seguinte:

QUADRO IV.12

CURVA - $\alpha - \beta$	VXO	E Q U A Ç Ã O (IV.29)	K_C
CURVA I $\alpha = 1,0$ $\beta = 2,067$	1 m	$2,9765 \times 10^{-16} K_C^{10} - 8,589910^{-12} K_C^8 + 5,116 \times 10^{-8} K_C^6 - 9,2016 \times 10^{-3} K_C^4 + 4,58 \times 10^{-2} K_C^2 - 2 = 0$	6,82
	1,5 m	$9,8976 \times 10^{-13} K_C^{10} - 5,642 \times 10^{-9} K_C^8 + 6,638 \times 10^{-4} K_C^6 - 2,359 \times 10^{-3} K_C^4 + 0,2321 K_C^2 - 2 = 0$	3,10
	2,0 m	$3,121 \times 10^{-10} K_C^{10} - 5,629 \times 10^{-7} K_C^8 + 2,0956 \times 10^{-4} K_C^6 - 2,356 \times 10^{-3} K_C^4 + 0,733 K_C^2 - 2 = 0$	1,74
	3,0 m	$1,0378 \times 10^{-6} K_C^{10} - 3,6976 \times 10^{-4} K_C^8 + 2,718 \times 10^{-2} K_C^6 - 0,6039 K_C^4 + 3,713 K_C^2 - 2 = 0$	0,772
	3,5 m	$2,2650 \times 10^{-5} K_C^{10} - 4,3559 \times 10^{-3} K_C^8 + 0,1729 K_C^6 - 2,0721 K_C^4 + 6,8729 K_C^2 - 2 = 0$	0,568
	4,0 m	$3,2727 \times 10^{-4} K_C^{10} - 3,6893 \times 10^{-2} K_C^8 + 0,858 K_C^6 - 6,0323 K_C^4 + 11,73 K_C^2 - 2 = 0$	0,433
CURVA II $\alpha = 1,385$ $\beta = 6,57$	1 m	$1,3103 \times 10^{-15} K_C^{10} - 3,7012 \times 10^{-11} K_C^8 + 2,0338 \times 10^{-7} K_C^6 - 3,0254 \times 10^{-4} K_C^4 + 0,1071 K_C^2 - 2 = 0$	4,44
	1,5 m	$4,3572 \times 10^{-12} K_C^{10} - 2,431 \times 10^{-8} K_C^8 + 2,6386 \times 10^{-5} K_C^6 - 7,754 \times 10^{-3} K_C^4 + 0,5422 K_C^2 - 2 = 0$	1,98
	2,0 m	$1,3740 \times 10^{-9} K_C^{10} - 2,4256 \times 10^{-6} K_C^8 + 8,330 \times 10^{-4} K_C^6 - 0,0775 K_C^4 + 1,7128 K_C^2 - 2 = 0$	1,11
	3,0 m	$4,5688 \times 10^{-6} K_C^{10} - 1,5932 \times 10^{-3} K_C^8 + 0,1081 K_C^6 - 1,985 K_C^4 + 8,6713 K_C^2 - 2 = 0$	0,494
	3,5 m	$9,971 \times 10^{-5} K_C^{10} - 1,876 \times 10^{-2} K_C^8 + 0,6873 K_C^6 - 2,977 K_C^4 + 16,0646 K_C^2 - 2 = 0$	0,353
	4,0 m	$1,4407 \times 10^{-3} K_C^{10} - 0,1590 K_C^8 + 3,4122 K_C^6 - 19,8275 K_C^4 + 27,4056 K_C^2 - 2 = 0$	0,278
CURVA III $\alpha = 1,656$ $\beta = 49,554$	1 m	$1,1817 \times 10^{-14} K_C^{10} - 3,3079 \times 10^{-10} K_C^8 + 1,753 \times 10^{-6} K_C^6 - 2,3551 \times 10^{-3} K_C^4 + 0,6478 K_C^2 - 2 = 0$	1,77
	1,5 m	$3,9295 \times 10^{-11} K_C^{10} - 2,1727 \times 10^{-7} K_C^8 + 2,274 \times 10^{-4} K_C^6 - 0,060 K_C^4 + 3,279 K_C^2 - 2 = 0$	0,786
	2,0 m	$1,2391 \times 10^{-8} K_C^{10} - 2,1679 \times 10^{-5} K_C^8 + 7,1805 \times 10^{-3} K_C^6 - 0,6029 K_C^4 + 10,3651 K_C^2 - 2 = 0$	0,442
	3,0 m	$4,1203 \times 10^{-5} K_C^{10} - 0,0142 K_C^8 + 0,932 K_C^6 - 15,4518 K_C^4 + 52,4736 K_C^2 - 2 = 0$	0,196
	3,5 m	$8,9922 \times 10^{-4} K_C^{10} - 0,1677 K_C^8 + 5,924 K_C^6 - 53,034 K_C^4 + 97,21 K_C^2 - 2 = 0$	0,145
	4,0 m	$0,013 K_C^{10} - 1,4207 K_C^8 + 29,4114 K_C^6 - 154,3436 K_C^4 + 165,842 K_C^2 - 2 = 0$	0,111

QUADRO IV.13

$$\sqrt{B' R_T} = 390,98$$

REGIME ELASTO-PLÁSTICO - $P_{cr} = 2 K_C \sqrt{B' R_T}$						FASE ELÁSTICA	
VÃO	CURVA	K_C	P_{cr}	P_{usado}	P_{et}	P_{cr}^{el}	P_e
1,0m	C.I	6,82	269,7	73,5	88,2	324,3	58,8
	C.II	4,44	175,6	83,5	88,2	324,3	58,8
	C.III	1,77	69,9	87,9	88,2	324,3	58,8
1,5 m	C.I	3,10	122,6	49	58,8	144,3	39,2
	C.II	1,98	78,3	55,7	58,8	144,3	39,2
	C.III	0,786	31,1	58,6	58,8	144,3	39,2
2,0 m	C.I	1,74	68,8	36,75	44,1	81	29,4
	C.II	1,11	43,9	41,75	44,1	81	29,4
	C.III	0,442	17,5	43,95	44,1	81	29,4
3,0 m	C.I	0,772	30,5	24,5	29,4	36	19,6
	C.II	0,494	19,5	27,8	29,4	36	19,6
	C.III	0,196	7,8	29,3	29,4	36	19,6
3,5 m	C.I	0,568	22,5	24,8	29,7	26,5	16,8
	C.II	0,353	14,0	28,2	29,7	26,5	16,8
	C.III	0,145	5,7	29,6	29,7	26,5	16,8
4,0 m	C.I	0,433	17,1	18,38	22,05	20,5	14,7
	C.II	0,278	11,0	20,9	22,05	20,5	14,7
	C.III	0,111	4,4	21,98	22,05	20,5	14,7

Podemos constatar que para o presente exemplo os valores de carga utilizados são crescentes, de acordo com configurações tendendo ao limite de plastificação máxima. O valor da carga crítica decresce à cada configuração mais avançada até que atinja o valor da carga usada na configuração plástica. Diz-se então que este é o valor de carga crítica P_K de flambagem para a peça, uma vez que se estivesse atuando na peça cargas maiores que o citado valor a peça perderia sua estabilidade e flambaria.

No primeiro resultado do Quadro IV.13 este valor P_K deve estar por volta de 86,5 (conforme Gráfico IV.16-a), entre as configurações de curva II e III.

A seguir alguns gráficos Carga Crítica x Cargas Usadas nas fases consideradas dos exemplos realizados.

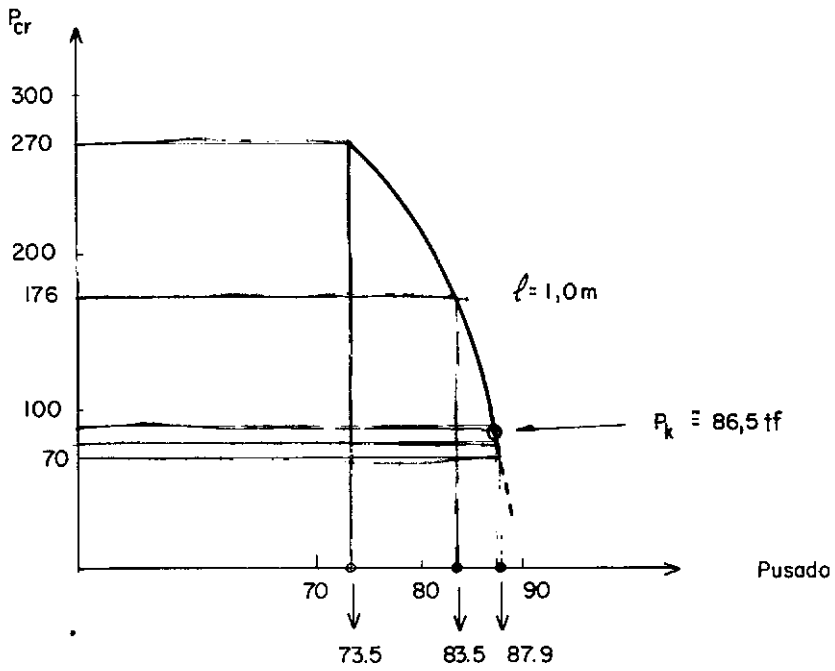


Fig. IV.16 (a)

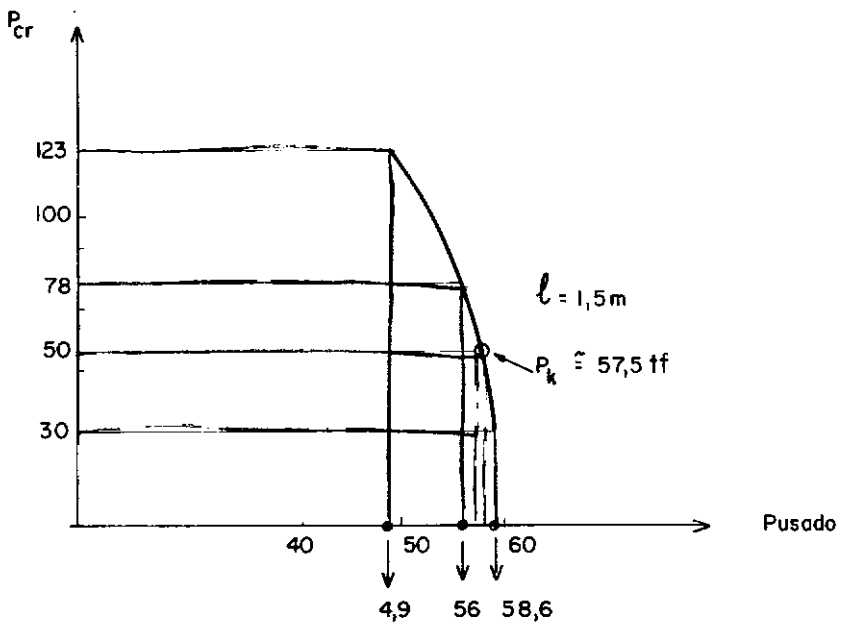


Fig. IV.16(b)

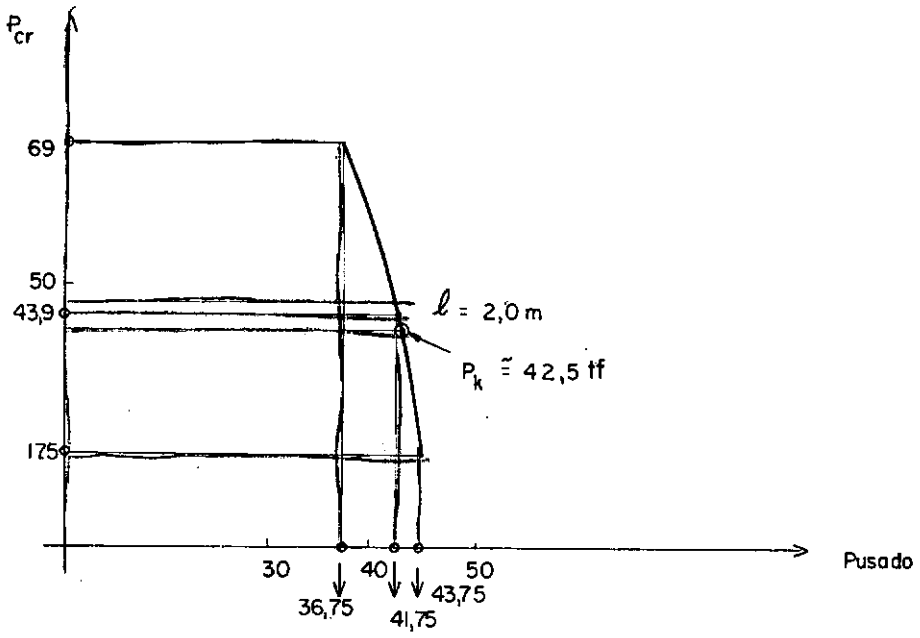


Fig.IV.I6(c)

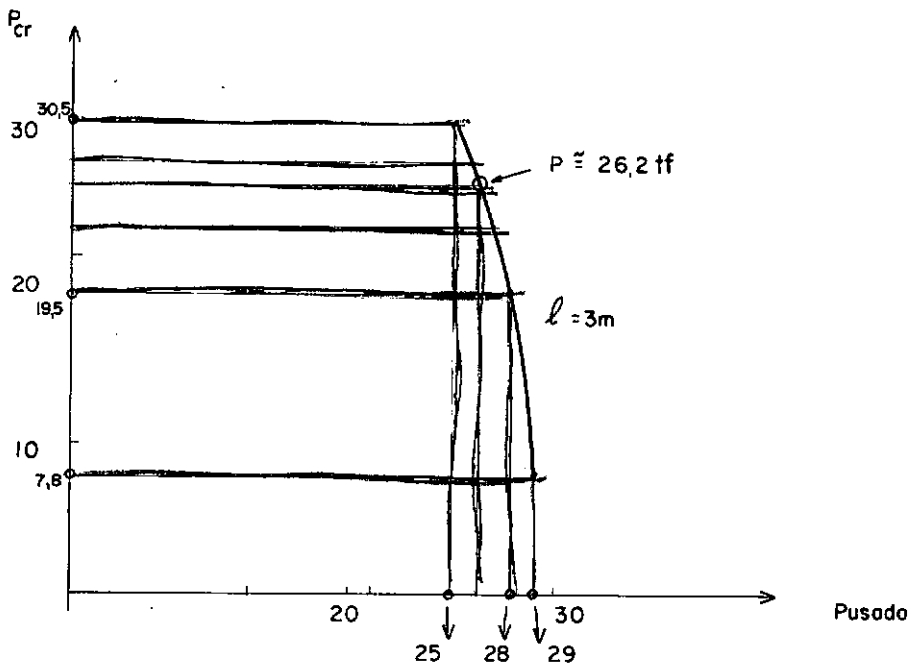


Fig.IV.I6(d)

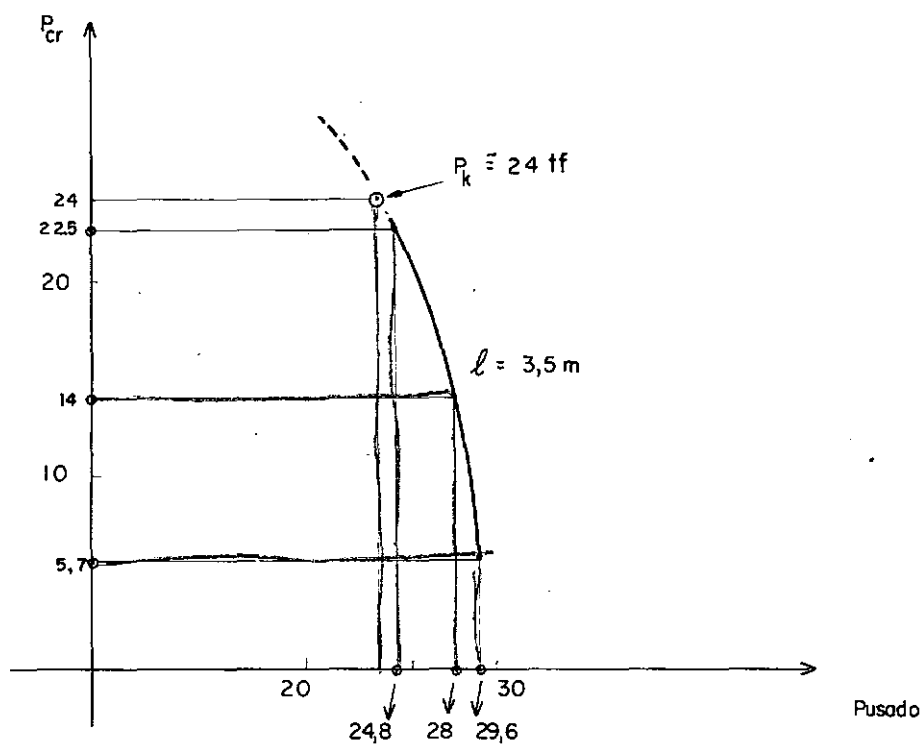


Fig.IV.16(e)

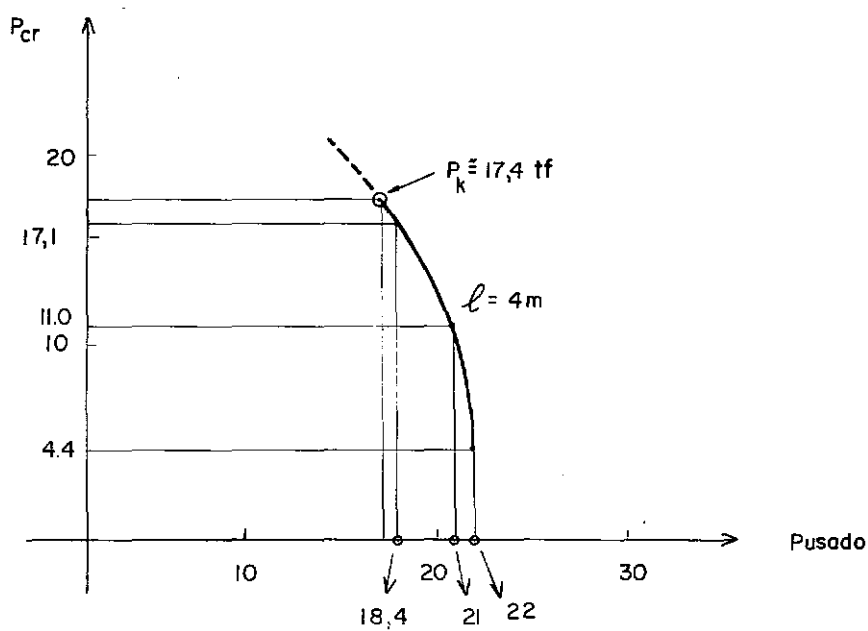


Fig.IV.16(f)

CAPÍTULO V

ANÁLISE DOS RESULTADOS

Esponetaneamente ao pesquisar a carga de flambagem de hastes em fase elasto-plástica, a autora foi levada a um roteiro, a uma sistemática de cálculo que pode ser resumida nos seguintes passos:

- 1- Determinar a carga crítica em regime elástico puro;
- 2- Verificar se o valor assim calculado determinaria setores plásticos em regiões da haste;
- 3- Determinar as configurações desses setores plásticos;
- 4- Recalcular as cargas críticas para a haste reduzida às áreas elásticas remanescentes;
- 5) Determinar novo setor plástico, e com eles obter nova carga crítica;
- 6) Repetir a situação até coincidência final. Quando esta ocorrer teremos a carga crítica desejada.

A primeira questão que esse roteiro suscita é a seguinte: haverá seguramente convergência no processo? E essa convergência se ocorrer em alguns exemplos, será geral?

A afirmativa valeria por uma demonstração que não foi feita. E desconhecemos que alguém tê-lo-á realizado.

Mas, com apoio na formulação de Bryan, achamos o encaminhamento muito plausível pelas razões seguintes:

- a) Quando a peça, em alguma região, começa a plastificação, seus deslocamentos principiam a crescer de modo acentuado, sem que o mesmo ocorra necessariamente com as deformações, porque continuará existindo um núcleo elástico;
- b) A demonstração de Bryan mostrou que a instabilidade supõe deformações muito pequenas em confronto com os deslocamentos;
- c) Como nos casos tratados, essa situação existe, o encaminhamento adotado pondo ser assim aplicado.

Comentemos agora o que resultou do estudo realizado:

Primeiramente, rápidas observações a respeito do Capítulo III (Fase Elástica) devem preceder, como uma introdução, à análise na fase elasto-plástica. Naquele Capítulo, che

gou-se a valores de carga crítica cuja grandeza situa-se entre limites definidos por P_e (carga atuante que inicia o escoamento de alguma seção da haste) e por P_{et} (carga que promove o setor de plastificação total na haste). Tem-se em decorrência:

a) quando $p_{cr}^{el} < P_e$,

a haste entra em instabilidade antes da formação de qualquer setor plástico;

b) nos casos em que $p_{cr}^{el} > P_e$,

se ocorrer instabilidade, a haste estará necessariamente em regime elasto-plástico.

Observa-se, contudo, como era de se esperar, que são mais susceptíveis à perda de estabilidade, as hastes de seção mais esbelta, por apresentarem espessuras reduzidas em relação à altura, o mesmo acontecendo para as peças de vãos maiores, como se pode constatar nos Quadros III.3 a III.5 e III.7 a III.9 e III.11 a III-13.

Assim em regime elasto-plástico (Capítulo IV), nos casos estudados, as hastes apresentaram carga crítica de flambagem lateral (Kippe) sempre inferiores às da fase elástica, resultado também esperado, uma vez que elas, devido à presença de setores plásticos, ficam reduzidas a áreas elásticas bem me-

nores.

Ainda com relação ao item a), acentuamos a existência de hastes que nunca flambariam em regime elásto-plástico porque já estariam fora de uso por instabilidade na fase elástica. Como exemplo, citam-se todos os casos de hastes não assinalados nos Quadros (III.3 e III.7) - hastes em balanço e às do Quadro (III.11) - haste bi-apoiada com engaste à torsão.

Outras, ao contrário, por assumirem a plastificação total, atingem, logicamente, seu limite de resistência, e portanto se arruinam antes de alcançar a carga que lhe faria perder a estabilidade. Como exemplo, citamos, para a viga em balanço, os resultados do Quadro IV.5 e os assinalados por (*) nos Quadros (IV.6) e (IV.7).

Observou-se, entretanto, que para a haste em balanço, nos exemplos citados, em que a carga crítica de flambagem elástica é muito superior ao valor P_{et} de plastificação total, da ordem de 15% maior, e verificamos nesses casos que não irá ocorrer flambagem elasto-plástica e sim colapso por flexão.

Nos casos em que P_{cr}^{el} é maior, porém de valor bem próximo a P_{et} (por volta de até 15% de P_{et}) consegue-se chegar a um valor de P_{cr} coincidente com o P_{usado} , precisamente o valor da carga crítica de flambagem P_K na fase elasto-plástica. Nos Quadros IV.6 e IV.7 temos os exemplos assinalados com (**). Isto ocorre também para valores de $P_{cr}^{el} < P_{et}$.

(Ver no Quadro IV.7 os assinalados por ∇).

Para a haste bi-apoiada com engaste à torção, o resultado é diverso. Nos primeiros exemplos do Quadro (IV.13) em que $P_{cr}^{el} > P_{et}$, sendo esta superior ou bem próxima a P_{et} , conseguiu-se sempre alcançar uma situação plástica na haste em que o valor crítico de flambagem nessa fase elasto-plástica coincidindo com a carga utilizada, constituiu pois o valor crítico procurado. O mesmo acontece quando $P_{cr}^{el} < P_{et}$. Nesse caso os valores de P_K foram determinados graficamente como se vê nas Figuras IV.16 e, f.

Ainda nesses exemplos, se observa que as três configurações plásticas ensaiadas em cada caso levaram à cargas críticas de flambagem lateral decrescentes para crescentes cargas P_{usadas} , conforme se constata nos gráficos das Figs. IV.16 a a f.

Sendo P_K menor do que P_{et} , a haste poderia ainda estar sujeita a cargas maiores quanto à solicitação flexante porém, com sua estabilidade comprometida; isso só seria possível se se dispusessem vinculações que viessem a impedir a flambagem lateral.

Tudo que está comentado acima ressalta de modo imediato do esquema seguinte:

Situações Possíveis	{	$p_{cr}^{el} < p_e$	-	flambagem em regime elástico
		$p_{cr}^{el} > p_e$	{	$p_{cr} < p_{et}$ - flambagem em regime $(p_K = p_{cr})$ elasto-plástico $p_{cr} > p_{et}$ - colapso por flexão

CAPÍTULO VI

CONCLUSÕES

1. O estudo da carga crítica de flambagem lateral na fase elasto-plástica, nas hastes retas de seção retangular apresentadas, levou-nos a valores sempre inferiores as da fase elástica. Isso evidentemente pode não ser válido para hastes com outras seções transversais;
2. O roteiro adotado será viável para aplicações mais extensas; mas sempre com grande elaboração de cálculo numérico;
3. Nos exemplos estudados tornou-se patente a inviabilidade de soluções compactas. Como os casos tratados foram muito simples, é de se prever que em problemas complexos as dificuldades crescam enormemente;
4. Em que pese as dificuldades numéricas, o trabalho mostrou viabilidade prática para soluções de projetos correntes;
5. Os cálculos realizados, o foram com emprego de uma calculadora simples (H.P. 25), que possibilitaram de modo rápido resolver por tentativas as equações de até 10 graus. Isso constitui prova da necessidade de equipamento bem atualizado, sem o qual não teríamos logrado os resultados aqui exibidos;

6. O assunto abordado é mais uma contribuição, mostrando a conveniência de cálculos mais acurados em projetos de estruturas metálicas. Não é outra aliás, a razão de ser de Normas especiais para as chamadas Estruturas Esbeltas (Exemplo: DIN. -4114, NB-14);
7. Como sugestão a futuras pesquisas recomenda-se a consideração de seções de formas diversas.

APÊNDICE A

Detalhando um pouco mais o texto inicial, damos deduções intermediárias àquelas que se encontram na Introdução.

Na expressão da variação de W , apareceu a variação da energia elástica, obtida pelo trabalho das tensões com as variações das deformações.

$$\delta\phi = P \delta e + Q \delta f + R \delta g + S \delta a + T \delta b + U \delta c$$

Isso posto, imaginemos um estado de tensões em equilíbrio constituído por δP , δQ , δR , δS , δT e δU . Submetendo-o as deformações virtuais de δe , δf , δg , δa , δb , δc , teremos um trabalho variação segunda da expressão de ϕ . A energia posta em jogo, por constituir um valor de que o funcional terá variado muito próximo ao da configuração inicial, podemos aplicar a fórmula (I.1), que é quadrática, gozando assim da propriedade que permite escrever-se:

$$\delta^2 \phi = 2 \phi (\delta e, \delta f, \delta g, \delta a, \delta b, \delta c) \quad (A.1)$$

As duas expressões de δV e $\delta^2 V$ são imediatas, mediante raciocínio análogo ao que aplicamos a $\delta\phi$. O mesmo ocorre com δT e $\delta^2 T$. Basta acrescentar que pela teoria do potencial, poderíamos usar, na dedução acima, as expressões da Mecânica:

$$X = - \frac{\partial V}{\partial x} \quad ; \quad Y = - \frac{\partial V}{\partial y} \quad ; \quad Z = - \frac{\partial V}{\partial z} \quad ;$$

$$F = - \frac{\partial T}{\partial x} \quad ; \quad G = - \frac{\partial T}{\partial y} \quad e \quad H = - \frac{\partial T}{\partial z}$$

A partir de ϕ (Eq. I.1), função quadrática e homogênea, tem-se a Eq. (A.1) como se segue:

$$\begin{aligned} \phi(e, f, g, a, b, c) &= \frac{1}{2} (m + n) (e + f + g)^2 + \\ &+ \frac{1}{2} n (a^2 + b^2 + c^2 - 4 fg - 4 ge - 4 ef) \end{aligned}$$

$$\delta\phi \equiv (m + n) (e + f + g) (\delta e + \delta f + \delta g) +$$

$$n (a\delta a + b\delta b + c\delta c - 2g\delta f - 2f\delta g - 2e\delta g - 2g\delta e - 2f\delta c - 2e\delta f)$$

$$\delta^2\phi \equiv (m+n) (\delta e + \delta f + \delta g)^2 + n (\delta a^2 + \delta b^2 + \delta c^2 - 4\delta f\delta g - 4\delta g\delta e - 4\delta e\delta f)$$

$$\equiv 2\phi(\delta e, \delta f, \delta g, \delta a, \delta b, \delta c)$$

APÊNDICE BTRANSFORMAÇÕES DAS EXPRESSÕES USADAS POR BRYAN1. Relação entre Constantes Elásticas

Hooke	Lamé	Thomson & Tait
G	u	m
E	λ	n
ν	-	-

$$G = \frac{E}{2(1 + \nu)}$$

$$u = G = n$$

$$m = \frac{G}{(1 - 2\nu)} = \frac{E}{2(1 + \nu)(1 - 2\nu)}$$

$$\lambda = \frac{2G\nu}{(1 - 2\nu)} = \frac{E\nu}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)}$$

$$u + \lambda = \frac{G}{(1 - 2\nu)} = \frac{E}{2(1 + \nu)(1 - 2\nu)} = m$$

$$m + n = \frac{2 G (1 - \nu)}{(1 - 2\nu)} = 2 u + \lambda$$

$$\frac{m}{m + n} = \frac{1}{2 (1 - \nu)}$$

a) A energia Potencial de Deformação é dada pela expressão abaixo: (Ver Love-Elasticity)

$$\phi = G \left[\epsilon_x^2 + \epsilon_y^2 + \epsilon_z^2 + \nu \frac{(\epsilon_x^2 + \epsilon_y^2 + \epsilon_z^2 + 2 \epsilon_x \epsilon_y + 2 \epsilon_x \epsilon_z + 2 \epsilon_y \epsilon_z)}{(1 - 2\nu)} \right] + \frac{G}{2} (\gamma_{xy}^2 + \gamma_{xz}^2 + \gamma_{yz}^2)$$

através de operações algébricas podemos também escrever:

$$\phi = G \left[(1 - \nu) \frac{(\epsilon_x^2 + \epsilon_y^2 + \epsilon_z^2)}{(1 - 2\nu)} + 2 \nu \frac{(\epsilon_x \epsilon_y + \epsilon_x \epsilon_z + \epsilon_y \epsilon_z)}{(1 - 2\nu)} \right] + \frac{G}{2} (\gamma_{xy}^2 + \gamma_{xz}^2 + \gamma_{yz}^2)$$

e utilizando a identidade:

$$(\epsilon_x^2 + \epsilon_y^2 + \epsilon_z^2) = (\epsilon_x + \epsilon_y + \epsilon_z)^2 - 2 (\epsilon_x \epsilon_y + \epsilon_x \epsilon_z + \epsilon_y \epsilon_z)$$

Teremos:

$$\phi = G \left[\frac{1-\nu}{(1-2\nu)} (\epsilon_x + \epsilon_y + \epsilon_z)^2 - 2 (\epsilon_x \epsilon_y + \epsilon_x \epsilon_z + \epsilon_y \epsilon_z) \right] + \frac{G}{2} (\gamma_{xy}^2 + \gamma_{xz}^2 + \gamma_{yz}^2)$$

ou

$$\phi = \frac{(1-\nu)G}{(1-2\nu)} (\epsilon_x + \epsilon_y + \epsilon_z)^2 + \frac{G}{2} (\gamma_{xy}^2 + \gamma_{xz}^2 + \gamma_{yz}^2 - 4 \epsilon_x \epsilon_y - 4 \epsilon_x \epsilon_z + \epsilon_y \epsilon_z)$$

Substituindo:

$$\epsilon_x = e; \quad \epsilon_y = f; \quad \epsilon_z = g; \quad \gamma_{xy} = a; \quad \gamma_{xz} = b; \quad \gamma_{yz} = c;$$

e também

$$\frac{m+n}{2} = \frac{G(1-\nu)}{(1-2\nu)}$$

e

$$\frac{n}{2} = \frac{G}{2}$$

temos a expressão usada por Bryan:

$$\phi = \frac{m+n}{2} (e + f + g)^2 + \frac{n}{2} (a^2 + b^2 + c^2 - 4 fg - 4 ge - 4 ef)$$

APÊNDICE C

- (a) A energia de deformação de uma placa com uma única curvatura não nula é dada por: (Ver Rev. Estrutura N° 8 pg. 582- - S. Santos "Teoria das Placas"):

$$A_i = \frac{EI}{2(1-\nu^2)} \int_0^l (y'')^2 dx = \frac{E h^3}{3(1-\nu^2)} \int_0^l (y'')^2 dx$$

Bryan usou:

$$A_i = \frac{4}{3} n h^3 \frac{m}{m+n} \int_0^l y''^2 dx$$

porém pondo

$$n = G = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

e

$$\frac{m}{m+n} = \frac{1}{2(1-\nu)}$$

resultou da expressão acima:

$$A_i = \frac{2}{3} \frac{G h^3}{(1-\nu)} \int_0^l (y'')^2 dx = \frac{E h^3}{3 (1-\nu^2)} \int_0^l (y'')^2 dx$$

b). Na teoria das placas encontramos (*).

$$\sigma_x = \frac{E}{(1-\nu^2)} (\epsilon_x + \nu \epsilon_y)$$

Bryan usou a mesma expressão; basta observar que

$$\epsilon_y = 0$$

e

$$\sigma_x = \frac{P}{2h} = p_x$$

temos no texto

$$8 nh \frac{m}{m+n} \sigma = P$$

donde

$$p = \frac{P}{2h} = 4 n \frac{m}{m + n} \sigma ;$$

que com os valores das constantes se escreve:

$$p = \frac{4 G}{2 (1 - \nu)} \sigma = \frac{E}{(1 - \nu^2)} \sigma ;$$

ele usou para exprimir a deformação unitária representada na fórmula acima por σ , (medida de compressão).

BIBLIOGRAFIA

1. SANTOS, S. M. G.; Kippe ou Flambagem Transversal , Rio de Janeiro, 1950.
2. VELLOSO, D. A.; Flambagem na Flexão Composta , Rio de Janeiro, 1961.
3. CROLL, J. G. A.; & WALKER, A. C.; Elements of Structural Stability , Editora MacMillan Press Ltd., Londres, 1972.
4. BRYAN, G. H.; On the Stability of Elastic Systems , Proceedings da Cambridge Philosophical Society, Cambridge, February, 1888.
5. SOUTHWELL, R. V.; On the General Theory of Elastic Stability , Publicado nos Anais da Royal Society, January, 1913.
6. VILLAS BOAS, J. M.; Flambagem, Separata do Manual do Engenheiro, VII Volume, Tomo 2, Editora Globo, Porto Alegre.
7. ROARK, R. J. & YOUNG W. G.; Formulas of Stress Strain, Editora McGraw-Hill, Kogakusha, Ltd. - 5th Edition, Tokyo.
8. TIMOSHENKO, S. P. & GERE, J. M.; Mechanics of Materials, Publicado por D. Van Nostrand Company, New York, 1972.

9. TIMOSHENKO, S. P.; Theory of Elasticity, Editora McGraw-Hill, Kogakusha, Ltd., Third Edition, Tokyo.
10. SIMITSES, G. J.; Elasticity Stability of Structures, Prentice-Hall Inc., Englewood Cliffs, New Jersey.
11. Norma NB-14
12. Revista Estrutura Nº 5, pg. 166 - Artigo sobre Teoria das Placas - Sidney M. G. dos Santos
13. Revista Estrutura Nº 8, pg. 56 - Teoria das Placas - Sidney M. G. dos Santos
14. LEONHARDT, F.; MONNIG, E. - Construções de Concreto, Volume 1 - Interciência - 1ª Edição - Rio de Janeiro, 1977
15. ODEN, J. T.; RIPPERGER, E. A. - Mechanics of Elastic Structures - McGraw-Hill Book Company, New York, 2ª Edição.
16. MASON J. - Variational, Incremental and Energy Methods in Solid Mechanics and Shell Theory - Elsevier Scientific Publishing Company - Amsterdam, 1980.